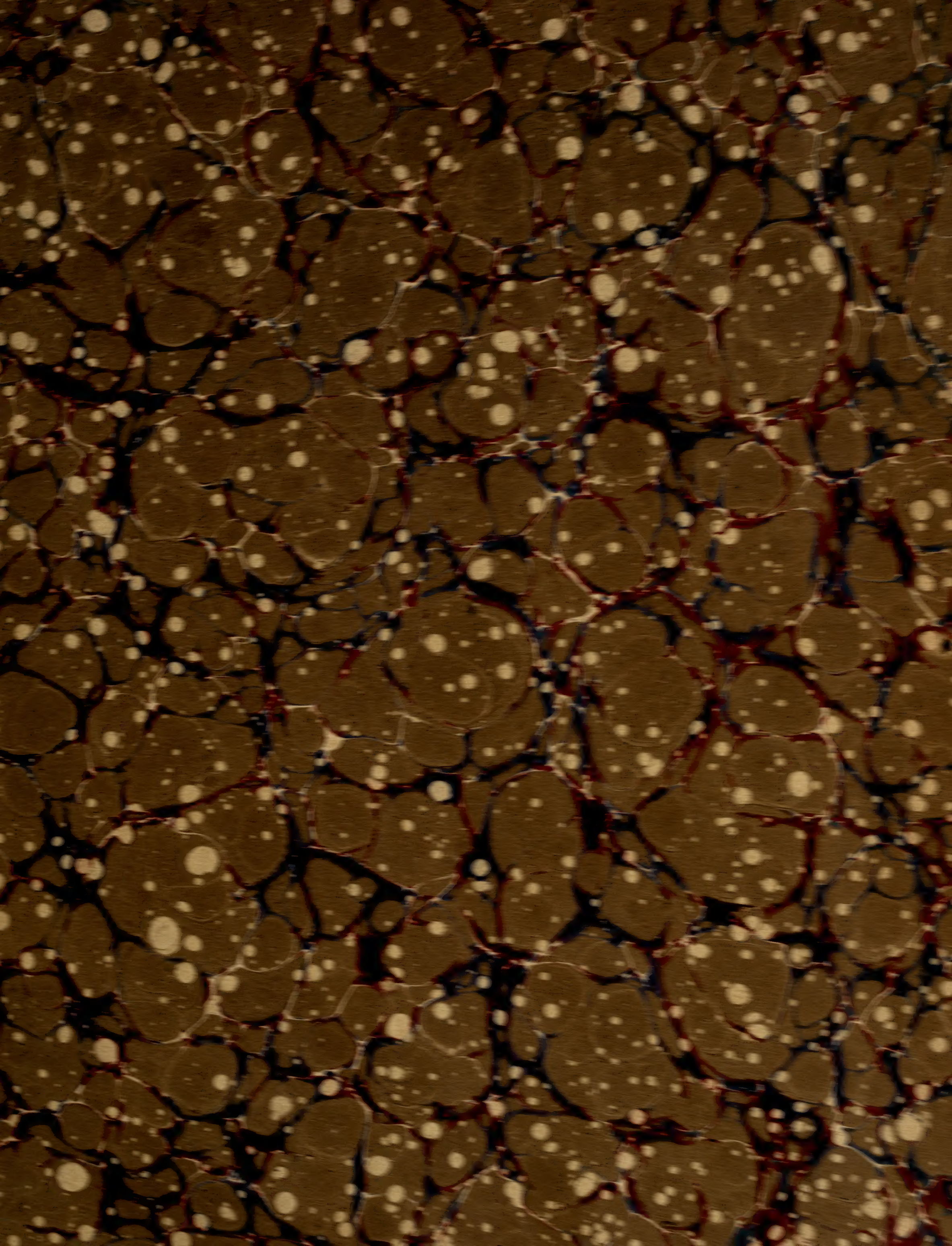

UC-NRLF
C 3 169 820



ASTRONOMY, MATHEMATICS-
STATISTICS LIBRARY
Mathematical Department
REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received May, 1897.
Accession No. 65586. Class No.





FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

COURS D'ANALYSE

PROFESSÉ PAR

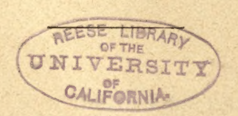
M. DEMARTRES

ET RÉDIGÉ PAR

M.-E. LEMAIRE

TROISIÈME PARTIE

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES



PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

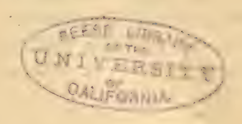
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

8, *Rue de la Sorbonne*, 8

—

1896

TABLE DES MATIÈRES



PREMIÈRE PARTIE

Généralités sur les systèmes d'équations différentielles

Pages.

DEUXIÈME PARTIE

Procédés d'intégration

TROISIÈME PARTIE

Équations d'ordre supérieur. — Systèmes d'équations différentielles

QUATRIEME PARTIE

Équations aux dérivées partielles

CINQUIÈME PARTIE

Calcul des variations

Erratum. — L'énoncé du premier exercice, page 57, doit être complété ainsi qu'il suit :

Trouver une courbe plane telle que la projection de la normale sur l'axe des y, *parallèlement à la tangente*, ait une longueur constante $2a$.

Tours. — Imprimerie Deslis Frères

qui vérifient les inégalités $|z_i - a_i| < \rho$.

4°. Les dérivées partielles de la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, dans les mêmes limites sont déterminées par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0 .$$

C'est dans ce sens qu'on dit que l'équation

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n, u) = 0$$

définit u comme fonction implicite des variables $z_1, z_2, \dots, z_n$. Cette définition se précise d'ailleurs complètement si on démontre que la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est la seule fonction continue des z qui, dans les environs des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$, vérifie l'équation donnée ; on établit sans peine ce théorème comme dans le cas d'une seule variable indépendante ; reprenons rapidement cette démonstration.

— Dans les plans des variables z, traçons, à partir des points $a_1, \dots a_n$, des courbes $C_1, C_2, \dots, C_n$, en ne conservant pour chacune d'elles que la partie comprise à l'intérieur d'un cercle du rayon ρ défini précédemment. Supposons qu'il existe une fonction $\psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ définie et continue le long des arcs C et vérifiant identiquement, le long de ces arcs, la relation

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n, \psi) = 0 ;$$

nous allons montrer que pour ces valeurs des z, les fonctions φ et ψ coïncident.

En effet, soit $\psi = \varphi + \lambda$,

La fonction $\lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sera, le long des courbes C, bien définie et continue, elle s'annulera pour $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, ..., $z_n = a_n$, puisque pour ces valeurs des z, les fonctions φ et ψ, prennent toutes deux la valeur b.

La fonction $f(z_1, z_2, \dots, z_n, \varphi + \lambda)$ sera alors, en supposant qu'on ait diminué au besoin la valeur de ρ, développable en série entière, et on aura :

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n, \varphi + \lambda) = f(z_1, z_2, \dots, z_n, \varphi) + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots$$

Donc, pour les valeurs des z considérées, c'est-à-dire le long des arcs C, on aura identiquement

$$\lambda (A_1 + A_2 \lambda + \dots) = 0 .$$

Le coefficient A_1 n'est autre chose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}$; donc à cause de l'hypothèse faite sur cette dérivée, A_1 ne s'annule pas lorsque

l'on donne aux z leurs valeurs initiales $z_i = \alpha_i$, de plus la fonction λ est continue; la parenthèse $A_1 + A_2\lambda + \dots$, n'étant pas nulle pour les valeurs initiales des z, reste différente de zéro à l'intérieur des cercles de rayon ρ, si ρ est suffisamment petit. Donc enfin la fonction $\lambda(z_1, z_2, \dots z_n)$ est identiquement nulle tout le long des arcs $c_1, c_2, \dots c_n$, ce qu'il fallait démontrer.

II. — Expression analytique de la fonction implicite.

L'existence de la fonction implicite une fois établie, il est aisé de résoudre analytiquement l'équation $f(z_1, z_2, \dots z_n, u) = 0$, ou en d'autres termes, de trouver une expression analytique, donnant explicitement la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots z_n)$ à l'aide des variables z.

En effet, l'existence de cette fonction étant admise, les règles du calcul différentiel permettent d'obtenir de proche en proche les expressions de toutes ses dérivées partielles des divers ordres et en particulier les valeurs initiales de ces dérivées, c'est-à-dire ce qu'elles deviennent lorsque l'on donne aux variables z les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Cela suffit pour pouvoir calculer tous les termes du développement de la fonction $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ en série entière, et on a de cette façon une expression analytique de la fonction implicite. Ce premier développement n'est valable que si l'on ne s'écarte pas trop des valeurs initiales; dans chaque cas particulier, on pourra de proche en proche calculer d'autres développements qui donneront l'expression de la fonction pour un système de valeurs quelconques des variables; c'est ce que nous avons fait pour une fonction déterminée par une intégrale définie (2ième partie, page 50). On aura soin de faire suivre aux variables z des chemins ne passant pas par des points critiques, c'est-à-dire tels que pour ces valeurs la fonction $f(z_1, z_2, \dots z_n, u)$ cesse d'être holomorphe, ou que $\frac{\partial f}{\partial u}$ cesse d'être différent de zéro.

III. — Système de fonctions implicites.

Nous pouvons maintenant démontrer un théorème général d'où résulte l'existence d'un système de fonctions implicites en nombre quelconque. — Ce théorème est le suivant :

Théorème. — Soit un système d'équations de la forme :

$$(\alpha)\begin{cases} f_1(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p)=0 \\ f_2(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_p(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p)=0 \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_p$, s'annulent quand on y fait, d'une manière générale $z_i = a_i \quad u_j = b_j$;

2° Ces fonctions sont holomorphes par rapport aux $n+p$ variables dont elles dépendent, dans le voisinage de ces valeurs initiales.

3° Le déterminant fonctionnel $\frac{D(f_1 f_2 \dots f_p)}{D(u_1 u_2 \dots u_p)}$ n'est pas nul pour ces mêmes valeurs initiales.

Sous ces conditions, il existera un système de p fonctions :

$\varphi_1(z_1, z_2, \dots z_n), \ \varphi_2(z_1, z_2, \dots z_n), \dots \varphi_p(z_1, z_2, \dots z_n)$ satisfaisant aux conditions suivantes.

1° Elles se réduiront respectivement à $b_1, b_2, \dots b_p$ pour les valeurs $a_1, a_2, \dots a_n$, des z.

2° Elles seront holomorphes pour ces valeurs des z.

3° Pour toutes les valeurs des z suffisamment voisines des valeurs initiales, elles vérifieront identiquement les équations données (α), c'est à dire qu'il existera un nombre ρ, non nul, tel que pour toutes les valeurs des z satisfaisant aux inégalités $|z_i - a_i| < \rho$, les fonctions des z, obtenues en remplaçant les u par les fonctions φ dans les équations (α) soient identiquement nulles.

Ces fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, sont dites les fonctions implicites définies par le système (α).

Remarque — Observons que si le théorème était démontré les règles du calcul différentiel permettraient de calculer de proche en proche les dérivées partielles des divers ordres des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, ainsi définies ; on pourrait donc avoir, pour représenter ces fonctions, des développements en séries entières qui, d'ailleurs, seraient valables tant qu'on ne s'écarterait pas trop des valeurs initiales. Former

ces développements, ce sera pour nous, résoudre les équations ($\mathcal{L}$) par rapport à $u_1, u_2, \dots u_p$.

Supposons la proposition énoncée plus haut, vraie pour p équations nous allons faire voir qu'elle s'étend au cas de $p+1$ équations.

Considérons en effet un système de $p+1$ équations :

$$(1) \begin{cases} F_1(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_p, v) = 0 \\ F_2(z_1, z_2 \dots z_n, u_1, u_2 \dots\dots u_p, v) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_p(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2 \dots\dots u_p, v) = 0 \\ F(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots\dots u_p, v) = 0. \end{cases}$$

Les F satisfont par hypothèse aux conditions énoncées plus haut ; supposons qu'ils soient nuls pour $z_i = a_i$, $u_j = b_j$, $v = b$. Le déterminant fonctionnel $D = \frac{D(F_1, F_2, \dots F_p, F)}{D(u_1, u_2, \dots u_p, v)}$ étant différent de zéro pour ces valeurs initiales, l'un au moins des mineurs du premier ordre est différent de zéro et nous pouvons évidemment disposer de nos notations de telle sorte que ce mineur soit $\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \dots F_p)}{D(u_1, u_2, \dots u_p)}$.

Dans ces conditions, le théorème général étant supposé vrai pour le cas de p équations, les p premières équations (1) définiront un système de p fonctions implicites.

$\varphi(z_1, z_2, \dots z_n, v)$, $\varphi_2(z_1, z_2, \dots z_n, v)$, ... $\varphi_p(z_1, z_n \dots z_n, v)$, des $n+1$ variables $z_1, z_2 \dots z_n, v$, les valeurs initiales étant $z_i = a_i$, $v = b$. Résolvons ces p premières équations, comme nous l'avons dit dans la remarque première, le système (1) prendra la forme :

$$(2) \begin{cases} u_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n, v) \\ u_2 = \varphi_2(z_1, z_2 \dots z_n, v) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_p = \varphi_p(z_1, z_2 \dots z_n, v) \\ F(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots, u_p, v) = 0. \end{cases}$$

Si dans la dernière de ces équations, nous remplaçons $u_1, u_2, \dots u_p$ par les fonctions φ correspondantes, F devient fonction de $z_1, z_2, \dots z_n, v$; désignons la nouvelle équation par

$$(3) \qquad \mathcal{F}(z_1, z_2, \dots z_n, v) = 0$$

Cette équation (3) est vérifiée quand on y fait $z_i = \alpha_i$, $v = b$, de plus la fonction $\mathcal{F}(z_1, z_2, \ldots z_n, v)$ est évidemment holomorphe dans le voisinage de ces valeurs ; si nous prouvons que pour ces mêmes valeurs sa dérivée partielle par rapport à v est différente de zéro, l'équation (3) définira v comme fonction implicite de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; effectuant la résolution et transportant cette valeur de v dans les p premières équations (2), on aura enfin

$$u_1 = \Psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad u_2 = \Psi_2(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots u_p = \Psi_p(z_1, z_2, \ldots z_n)$$
$$v = \Psi(z_1, z_2, \ldots z_n),$$

et le théorème sera démontré, car il est évident que les fonctions ψ satisferont aux équations données.

Tout revient donc à prouver qu'on a $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \neq 0$ pour $z_i = \alpha_i$, $v = b$.

Or, d'après la définition de φ et $\mathcal{F}$, on a identiquement

$$F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, v) \equiv 0$$
$$F(z_1, z_2, \ldots z_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, v) \equiv \mathcal{F}.$$

Si donc nous différentions ces identités par rapport à v, nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial v} = 0 \\
\frac{\partial F_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial v} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial F_p}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_p}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \cdots + \frac{\partial F_p}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F_p}{\partial v} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 0.
\end{array}\right.$$

On en déduit en éliminant $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \ldots \frac{\partial \varphi_p}{\partial v}$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\cdot\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_p)}{D(u_1, u_2, \ldots u_p)} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots F_p, F)}{D(u_1, u_2, \ldots u_p, v)}$$

ou :

$$\Delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = D.$$

Or pour les valeurs initiales, le déterminant fonctionnel D n'est pas nul, d'autre part, le déterminant Δ qui est fonction entière des dérivées partielles de fonctions toutes holomorphes pour les valeurs initiales, est fini pour

ces valeurs ; donc on a bien $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$, ce qui démontre le théorème.

IV – Existence d'un seul système de fonctions implicites.

Tout système de fonctions continues, $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_p$, vérifiant les équations (α), coïncide avec le système de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ défini par le théorème précédent, pourvu bien entendu, qu'on attribue aux variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots z_n$, des valeurs suffisamment voisines des valeurs initiales ; en d'autres termes, les équations (α) n'admettent pas d'autre solution que le système des fonctions φ dans le domaine des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Cette proposition doit être entendue comme dans le cas d'une seule fonction ; il est clair d'ailleurs que la démonstration faite plus haut, s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de fonctions implicites ; il n'y a rien à changer au fond même du raisonnement.

Si l'on pose $\psi_i = \varphi_i + \lambda_i$, et si on développe les fonctions f_i en séries entières, on sera conduit à écrire p identités de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + A_p \lambda_p = 0 \\ B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + B_p \lambda_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + L_p \lambda_p = 0 \end{array}\right.$$

dont le déterminant est précisément égal au déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2 \ldots\ldots f_p)}{D(u_1, u_2 \ldots u_p)},$$

supposé différent de zéro.

On en conclut que ces équations ne peuvent être vérifiées, à moins que l'on n'ait $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots\ldots \lambda_p = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

V. Fonctions inverses.

— Supposons que dans le système (α), il y ait autant de variables z, que de fonctions $\underline{u}$. De même qu'il existe un système de fonctions

$$u_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \ldots z_p), \; u_2 = \varphi_2(z_1, z_2 \ldots z_p), \ldots\ldots u_p = \varphi_p(z_1, z_2 \ldots z_p)$$

vérifiant identiquement dans le domaine des valeurs initiales les équations (α), il existe aussi un système de p fonctions.

$$z_1 = \psi(u_1, u_2, \ldots u_p), \; z_2 = \psi_2(u_1, u_2, \ldots u_p), \ldots\ldots z_p = \psi_p(u_1, u_2 \ldots u_p)$$

holomorphes dans le voisinage des valeurs $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$ ..... $u_p = b_p$, se rédu-
sant respectivement à α_1, α_2 .... α_p lorsqu'on y fait $u_i = b_i$, enfin vérifian
identiquement les équations (α), dans un domaine suffisamment restrein
autour des valeurs initiales, pourvu toutefois que, pour ces valeurs, le déter-
minant fonctionnel

$$\frac{D(f_1 f_2 \dots f_p)}{D(u_1 u_2 \dots u_p)}$$ supposé différent de zéro.

Les fonctions ψ ainsi définies sont dites les fonctions inverses des fonctions φ.

Deuxième Leçon.

Equations différentielles du premier ordre.

Théorème de Cauchy. — Considérons maintenant le cas où les équations données contiennent, outre les fonctions inconnues d'une variable, leurs dérivées par rapport à cette variable. Ces équations différentielles sont dites d'ordre p, si les dérivées qui y figurent sont au plus d'ordre p, l'une au moins étant exactement d'ordre p.

Nous supposerons d'abord que les équations sont du premier ordre et résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues ; nous avons ainsi un système de la forme :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = f_1(z\, u_1\, u_2 \dots\dots u_p) \\ \dfrac{du_2}{dz} = f_2(z, u_1\, u_2 \dots\dots u_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du_p}{dz} = f_p(z, u_1\, u_2 \dots\dots u_p) \end{cases}$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

Théorème. - Les fonctions $f_1 f_2 \dots f_p$ étant supposées holomorphes dans le voisinage des valeurs $z = a$, $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$, ... $u_p = b_p$, il existe un système de fonctions $u_1 = \varphi_1(z)$, $u_2 = \varphi_2(z)$, ... $u_p = \varphi_p(z)$, holomorphes dans le domaine du point $z = a$, se réduisant respectivement à $b_1, b_2, \dots b_p$ pour $z = a$ et vérifiant identiquement les équations (1) pour des valeurs de z suffisamment voisines de a.

La démonstration se simplifie si on suppose que z ne figure pas dans les seconds membres des équations (1). On peut d'ailleurs ramener le cas général à ce cas particulier. Considérons en effet le système :

$$(II) \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = f_1(v, u_1, u_2 \dots u_p) \\ \dfrac{du_2}{dz} = f_2(v, u_1, u_2 \dots u_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du_p}{dz} = f_p(v, u_1, u_2 \dots u_p) \\ \dfrac{dv}{dz} = 1 \end{cases}$$

Assujettissons la fonction v à se réduire à a pour $z = a$; le sys (II) sera évidemment équivalent au système (1) ; il y aura une équation de plus, mais les seconds membres ne contiendront plus la variable indépendante.

Enfin, nous pouvons sans inconvénient, supposer nulles les valeurs initiales a, b_1, $b_2 \dots b_p$. Nous démontrerons le théorème énoncé dans le cas de trois équations, le raisonnement s'étendra de lui-même au cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soit donc le système

$$(1) \begin{cases} \dfrac{du}{dz} = f(u, v, w) \\ \dfrac{dv}{dz} = \varphi(u, v, w) \\ \dfrac{dw}{dz} = \psi(u, v, w) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions f, φ, ψ, sont holomorphes dans le voisinage des valeurs $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Nous allons montrer qu'il existe trois fonctions de z :

$$u = \lambda(z) \qquad v = \mu(z) \quad , \quad w = \theta(z)$$

holomorphes dans le domaine de l'origine, s'annulant pour $z = 0$ et vérifiant identiquement le système (1) dans un cercle de rayon suffisamment restreint, mais non nul, entourant l'origine.

A priori, si ces fonctions : $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\theta(z)$ existent, nous pouvons les développer en séries entières de la forme :

$$(2)\quad \begin{cases} u = \lambda(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots \\ v = \mu(z) = B_1 z + B_1 z^1 + \ldots + B_n z^n + \ldots \\ w = \theta(z) = C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z + \ldots \end{cases}$$

et nous pouvons calculer les coefficients de ces séries. Ces coefficients dépende uniquement des dérivées des divers ordres des fonctions λ, μ θ prises pour $z = 0$. Or les trois identités supposées vraies :

$$\frac{d\lambda}{dz} = f(\lambda, \mu, \theta) \quad \frac{d\mu}{dz}, = \varphi(\lambda, \mu, \theta), \quad \frac{d\theta}{dz} = \psi(\lambda, \mu, \theta)$$

permettent de calculer de proche en proche les dérivées d'ordre quelconque.

Remarque. — Il est important d'observer que chacun des coeffi cients A,B,C ainsi déterminés, sera composé linéairement avec les dérivées partielles des divers ordres des fonctions f, φ, ψ prises pour $u = 0, v = 0, w = 0$, les multiplicateurs étant des nombres positifs, absolument indépendants de la forme particulière de ces fonctions.

Le premier point à démontrer est que les séries ainsi obtenues sont convergentes.

Cette démonstration repose sur un lemme également dû à Cauchy et que nous établirons d'abord.

Lemme — $f(z)$ étant une fonction holomorphe dans un aire (C) comprenant l'origine, et sur le contour de cette aire, on a :

$$\left(\frac{d^p f(z)}{dz^p}\right)_{z=0} = \frac{1.2.3\ldots p}{2i\pi} \int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\, dz,$$

Si pour contour (C), on prend un cercle de rayon r, décrit de l'origine comme centre, il vient :

$$\left(\frac{d^p f}{dz^p}\right)_0 = \frac{1,2,3\ldots p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^p e^{pi\theta}}\, d\theta;$$

de sorte que si M est un nombre supérieur au module maximum de la fonct $f(z)$ soit sur le contour du cercle (C), soit dans son intérieur, on a l'iné galité suivante :

$$\left|\left(\frac{d^p f}{dz^p}\right)_0\right| < \frac{1,2,3\ldots p}{r^p}\, M.$$

On peut étendre ce résultat au cas d'une fonction de plusieurs variables. Soit par exemple, $f(z, z')$ une fonction des deux variables z et z', nous supposons cette fonction holomorphe si les variables se meuvent à l'intérieur ou sur le contour de deux cercles (C), (C') de même rayon $\underline{r}$, décrits des origines $z = 0$, $z' = 0$ comme centres. Fixons pour un instant, la variable z' ; nous avons donc :

$$\left(\frac{\partial^p f(z, z')}{\partial z^p}\right)_0 = \frac{1.2.3\ldots p}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(z, z')}{z^{p+1}}\, dz,$$

Si nous rendons libre la variable z', le premier membre est une fonction de z' que nous pouvons désigner par $F(z')$ et il vient.

$$\left(\frac{\partial^{p+2} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z^q}\right)_0 = \frac{1,2.3\ldots q}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{F(z')}{z'^{q+1}}dz'$$

ou en remplaçant $F(z')$ par sa valeur:

$$\left(\frac{\partial^{p+2} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 = \frac{1.2.3\ldots 2}{2i\pi} \cdot \frac{1.2.3\ldots p}{2i\pi}\iint_{(C')(C)}\frac{f(z.z')}{z^{p+1}z'^{q+1}}dz.dz'.$$

Posons comme précédemment, $z = re^{i\theta}$, $z' = re^{i\theta'}$ cette égalité prend la forme:

$$\left(\frac{\partial^{p+q} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 = \frac{1,2.3\ldots q.\ 1.2.3\ldots p}{(2i\pi)^2 . r^{p+q}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, re^{i\theta'})e^{-pi\theta}e^{-qi\theta}d\theta.d\theta'$$

Enfin en désignant par M un nombre supérieur au module de la fonction $f(z,z')$ soit sur le contour des cercles (C), (C'), soit dans leur intérieur, on obtient l'inégalité suivante:

$$\left(\frac{\partial^{p+q} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 < \frac{1.2.3\ldots p . 1.2.3\ldots q}{r^{p+q}} M$$

Le raisonnement est général, et si nous l'appliquons au cas qui nous occupe, nous pouvons écrire:

$$\left|\left(\frac{\partial^{p+q+s} f(u.v.w)}{\partial u^p . \partial v^q \partial w^s}\right)\right| < \frac{1.2.3\ldots p,\ 1.2.3\ldots q, 1.2.3\ldots s}{r^{p+q+s}} M.$$

Considérons maintenant la fonction $H = \dfrac{M}{(1-\frac{u}{r})(1-\frac{v}{r})(1-\frac{w}{r})}$.

Cette fonction est holomorphe tant que les variables u, v, w, restent en module inférieures à r; on peut alors la développer par la formule de Mac Laurin.

Le terme en u^p, v^q, w^s dans ce développement, a pour coefficient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p\ 1.2.3\ldots q.\ 1.2.3\ldots s}\left(\frac{\partial^{p+q+s} H}{\partial u^p \partial v^q \partial w^s}\right)_{u=0,\, v=0,\, w=0}$$

D'autre part, on peut former un second développement de la fonction H, car dans le domaine des origines, on a:

$$\frac{1}{1-\frac{u}{r}} = 1 + \frac{u}{r} + \frac{u^2}{r^2} + \ldots + \frac{u^p}{r^p} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{v}{r}} = 1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + \ldots + \frac{v^q}{r^q} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{w}{r}} = 1 + \frac{w}{r} + \frac{w^2}{r^2} + \ldots + \frac{w^s}{r^s} + \ldots$$

Le coefficient du terme en $u^r v^q w^s$ dans ce second développemen de H, est :

$$\frac{M}{r^{p+q+s}}$$

Il résulte de là qu'on a : $\left(\frac{\partial^{p+q+s} H}{\partial u^r \partial v^q \partial w^s}\right)_0 = 1.2.3\ldots p.\,1.2.3\ldots q.\,1.2.3\ldots s.\frac{}{r}$
Et par suite :

$$\left|\left(\frac{\partial^{p+q+s} f(u,v,w)}{\partial u^p, \partial v^q, \partial w^s}\right)_0\right| < \left(\frac{\partial^{p+q+s} H(u,v,w)}{\partial u^p \partial v^q \partial w^s}\right)_0$$

II. Convergence des séries (2).

—— Ce lemme étan établi, la démonstration du théorème s'achève très simplement. D'apr la remarque que nous avons faite précédemment sur la forme des coefficien des séries (2), si les séries que l'on obtient en remplaçant la fonction $f(u,v,w)$ par la fonction H sont convergentes dans un cercle de rayo ϱ, les séries (2) sont elles-mêmes convergentes dans le même cercle. En e en donnant à z une valeur positive inférieure à ϱ, d'ailleurs aussi rappro chée que l'on veut de ce nombre, les séries ont leurs termes tous positifs et inférieurs aux termes correspondants des séries formées à l'aide de l fonction H ; elles convergent donc dans le cercle de rayon ϱ.

Considérons donc le système de comparaison suivant :

$$(3) \qquad \frac{du}{dz} = H, \quad \frac{dv}{dz} = H \quad \frac{dw}{dz} = H$$

u, v, w devant s'annuler pour $z = 0$.

On en déduit immédiatement $\frac{d(u-v)}{dz} = 0$ et $\frac{d(u-w)}{dz} = 0$, d'où $u = v = w$.

De sorte que le système (3) se réduit à la seule équation :

$$\frac{d\lambda}{dz} = \frac{M}{(1-\frac{\lambda}{z})^3}$$

λ désignant l'une quelconque des trois fonctions u, v, w, et s'annulant p suite pour $z = 0$. Cette équation se met sous la forme :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{z}\right)^3 d\lambda = M\,dz$$

on en déduit :

$$-\frac{r}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^4 = Mz - \frac{r}{4}$$

d'où :

$$(\alpha) \qquad \lambda = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4M}{r}z}\right)$$

on aura soin de prendre la détermination du radical qui se réduit à 1 p $z = 0$. On est ainsi assuré que le système (3) admet une solution holomo dans le voisinage de la valeur $z = 0$ et s'annulant pour cette valeur initi

Si donc on cherche, à priori, le développement de cette solution comme nous l'avons fait pour le système proposé, on obtiendra pour chacune des fonctions u, v, w, une même série convergente tant qu'on aura $z < \frac{r}{4M}$. On en conclut que les séries (2) sont convergentes dans un cercle de rayon au moins égal à $\rho = \frac{r}{4M}$, ce qu'il fallait démontrer.

III. – Existence des intégrales.

– Il est facile maintenant d'établir que les fonctions définies par ces séries dans le cercle de rayon ρ vérifient identiquement les équations données. En effet, quand z reste inférieur à ρ, la fonction λ conserve un module inférieur à r, d'après l'équation (α); donc dans ce cercle chacune des fonctions u, v, w, reste en module inférieure à r et par suite les fonctions f, φ, ψ sont holomorphes par rapport à u, v, w. Si on remplace dans ces fonctions u, v, w par leur expression en fonction de z, elles deviennent elles-mêmes des fonctions holomorphes de z. D'autre part, il est évident d'après la manière dont nous avons calculé les coefficients des séries (2), que $\frac{du}{dz}$ et $f(u, v, w)$ ont pour $z = 0$ toutes leurs dérivées égales, donc ces deux fonctions ne diffèrent que par une constante, et comme elles s'annulent pour $z = 0$, elles coïncident dans tout le cercle de rayon ρ. Nous avons donc bien un système d'intégrales holomorphes.

Nous démontrerons d'ailleurs que les intégrales holomorphes que l'on vient de trouver sont les seules solutions possibles du système (1); en d'autres termes, si des fonctions U, V, W, définies, continues le long de courbes C_1 C_2 C_3 aboutissant au point $z = 0$, vérifient identiquement le système proposé, elles coïncident le long de ces courbes avec les intégrales holomorphes trouvées. La démonstration de ce théorème important est due à Mr Picard. (Analyse. Tome II. p. 135). Nous donnerons plus tard cette démonstration qui repose sur la théorie des équations aux dérivées partielles.

IV. – Forme des intégrales.

Les fonctions u, v, w, qui constituent la solution du système (1) ont des développements dont les coefficients dépendent des valeurs initiales b, b_2, b_3 de ces fonctions. D'autre part, si en conservant la même valeur initiale pour z, on prend comme nouvelles valeurs initiales de u, v, w des quantités suffisamment voisines des premières, les fonctions f, φ, ψ ne cessent pas d'être holomorphes et on a un autre système d'intégrales holomorphes où les nouvelles valeurs initiales remplaçent les premières. Les valeurs initiales des fonctions u, v, w peuvent donc être prises arbitrairement, pourvu qu'elles restent dans un champ suffisamment restreint. Dans ce sens, on dit que les fonctions, intégrales du système (1), dépendent de trois constantes arbitraires.

Quand on ne fixe pas la valeur particulière qu'on attribue aux constantes, le système trouvé constitue l'intégrale générale du système proposé. On peut mettre ce système sous bien des formes différentes. En particulier, on peut le supposer résolu par rapport aux constantes et l'on a ainsi trois équations de la forme $F(z,u,v,w) = C$, $\Phi(z,u,v,w) = C'$, $\Psi(z,u,v,w) = C''$

L'application même de la méthode de Cauchy, permet de les obtenir sous cette forme. Prenons pour $z = \alpha$ des valeurs initiales arbitraires $b_1 b_2 b_3$. Faisons décrire à z un chemin l'amenant de $\underline{a}$ à z et soient u, v, w, les valeurs finales des trois fonctions. Reprenons la question en choisissant comme valeurs initiales z, u, v, w. Si nous faisons revenir la variable depuis z jusque $\underline{a}$, par le même chemin, d'après la réciproque de Cauchy nous aboutirons nécessairement à des valeurs finales qui seront b_1, b_2, b_3 et les intégrales se présenteront sous la forme:

$$b_1 = \lambda(z, u, v, w), \quad b_2 = \mu(z, u, v, w), \quad b_3 = \theta(z, u, v, w)$$

elles seront donc résolues par rapport aux constantes b_1, b_2, b_3.

– D'une manière plus générale, supposons qu'on ait trois intégrales de la forme $\lambda(z, u, v, w, C, C', C'') = 0$ $\mu(z, u, v, w, C, C', C'') = 0$, $\theta(z, u, v, w\ C\ C'\ C'') = 0$, $C\ C'\ C''$ étant des constantes arbitraires, on peut se demander dans quel cas ces équations donneront l'intégrale générale de Cauchy.

Pour cela, il faut que les fonctions de z qu'on déduit de ces équations se réduisent à $b_1\ b_2\ b_3$, lorsqu'on y fait $z = \alpha$; donc il faut pouvoir disposer des constantes C, C', C'' de manière à satisfaire aux équations:

$$\lambda(\alpha\ b_1\ b_2\ b_3, C\ C'\ C'') = 0, \quad \mu(\alpha, b_1, b_2, b_3, C, C', C'') = 0, \quad \theta(\alpha, b_1\ b_2\ b_3, C\ C'\ C'') = 0$$

Ces équations pourront toujours être satisfaites, si elles peuvent être résolues par rapport à $C\ C'\ C''$, ce qui exige la condition:

$$\frac{D(\lambda, \mu, \theta)}{D(C\ C'\ C'')} \neq 0$$

Donc quand les intégrales données seront résolubles par rapport aux constantes qui y entrent, pour tous les systèmes de valeurs de $z\ u\ v\ w$ qui correspondent à l'intégrale de Cauchy, on pourra être assuré que le système donné fournit l'intégrale générale.

V — Le théorème de Cauchy s'étend au cas où les équations données ne sont pas résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, pourvu que le déterminant fonctionnel des premiers membres de ces équations par rapport à: $\frac{du}{dz}\ \frac{dv}{dz}\ \frac{dw}{dz}$

soit différent de zéro pour les valeurs initiales attribuées à z, u, v, w, car, d'après le théorème des fonctions implicites, le système proposé,

peut être remplacé par un autre, résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

Troisième Leçon

Étude des fonctions définies par des équations différentielles.

I — Considérons l'équation $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ (1)

Le coefficient différentiel f étant supposé holomorphe dans le voisinage des valeurs $z = a$, $u = b$, il existe d'après le théorème de Cauchy, une intégrale, holomorphe dans un cercle de rayon ρ suffisamment restreint, décrit du point a comme centre et se réduisant à b pour $z = a$. Faisons suivre à la variable un certain chemin (C) ; en prenant comme nouvelle valeur initiale de z l'affixe a_1 d'un point de ce chemin, intérieur au cercle précédent, le développement de l'intégrale pourra s'étendre dans un nouveau cercle de rayon ρ décrit autour du point a_1 comme centre. En général, ce cercle aura une partie extérieure au premier, et en prenant le point a_2 du chemin (C) comme valeur initiale de z, nous étendrons encore le développement de l'intégrale et ainsi de suite. On est ainsi conduit à la notion de fonctions définies par des équations différentielles.

(C)
a
a a_1 a_2

II — **Points critiques.** — On sera arrêté, dans le développement de l'intégrale, lorsque l'on parviendra le long du chemin (C) à une valeur α de z telle que pour cette valeur et la valeur β correspondante de u, le coefficient différentiel cesse d'être holomorphe : un pareil point est dit point critique

A une valeur initiale de z, a, correspondent une infinité d'intégrales prenant pour $z = a$ des valeurs arbitraires ; il pourra se faire que certains points $z = \alpha$ soient des points critiques quelle que soit la valeur initiale choisie pour u ; mais, en général, on doit s'attendre à ce que les points critiques varient quand on passe d'une intégrale particulière à une autre ; on est donc amené à considérer deux catégories de points critiques. Nous appellerons les premiers "points critiques fixes", les seconds "points

critiques mobiles." La présence des points critiques mobiles constitue la difficulté principale dans la théorie des fonctions définies par des équations différentielles.

Prenons par exemple, l'équation $\frac{du}{dz} = f(z)$.

Le coefficient différentiel étant holomorphe pour $z = a$; On a:

$$u = \int_a^z f(z)\,dz + C$$

et on peut disposer de la constante C de façon que u prenne une valeur initiale quelconque b; il suffit pour cela de faire $C = b$. On voit qu'ici tous les points critiques sont fixes et ne dépendent que des singularités de $f(z)$.

Soit, au contraire l'équation $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z-u}$ (1).

Cherchons les points critiques pour l'intégrale qui se réduit à b pour $z=0$. Écrivons l'équation (1) sous la forme:

$$\frac{dz}{du} = z - u \qquad (2)$$

et posons:

$$z = \lambda e^{u}$$

Il vient pour déterminer λ:

$$\frac{d\lambda}{du} = -ue^{-u}$$

d'où

$$\lambda = (u+1)e^{-u} + C$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est, par suite:

$$z = u + 1 + Ce^{u}$$

On détermine C par la condition:

$$0 = b + 1 + Ce^{b}$$

de sorte que l'on aura:

$$z = u + 1 - (b+1)e^{u-b}$$

Les points critiques correspondent aux valeurs de z qui rendent le coefficient différentiel non holomorphe. Faisons donc $z = u$; on a ainsi:

$$0 = 1 - (b+1)e^{z-b}$$

d'où

$$z = b - L\,(b+1)$$

Donc, dans ce cas, tous les points critiques sont mobiles. En général, il y aura en même temps des points critiques fixes et des points critiques mobile.

Remarque — Quand il s'agit d'étudier une fonction définie par une équation différentielle, il y a lieu de faire $z = \frac{1}{\zeta}$ pour savoir comment se comportent les intégrales pour des valeurs infinies

de la variable.

Si d'autre part, l'intégrale devient infinie pour certaines valeurs de z, on doit faire la substitution $u = \frac{1}{v}$ et étudier comment varie la fonction v pour ces mêmes valeurs de z.

III —— Il est en général difficile, étant donné un système de valeurs α, β rendant non holomorphe le coefficient différentiel, de voir s'il y a une intégrale se réduisant à β pour $z = \alpha$, et quelle singularité cette intégrale peut présenter au point α. Nous nous contenterons d'examiner un cas très particulier.

Théorème — Si pour $z = \alpha$, $u = \beta$ le coefficient différentiel devient infini, l'inverse $\frac{1}{f(u z)} = \varphi(u z)$ s'annulant pour ces valeurs tout en restant holomorphe, il existe une intégrale se réduisant à β pour $z = \alpha$ et admettant le point α comme point critique algébrique.

D'après l'hypothèse, le théorème de Cauchy s'applique à l'équation:

$$\frac{dz}{du} = \varphi(u, z).$$

En d'autres termes, cette équation admet une intégrale holomorphe se réduisant à α pour $u = \beta$. Dans les environs de cette valeur β on peut donc écrire :

$$z - \alpha = A_1 (u - \beta) + A_2 (u - \beta)^2 + \dots$$

A son tour, cette équation définit u comme fonction de z. Or le premier coefficient A_1 n'est autre chose que $\left(\frac{dz}{du}\right)_{\alpha\beta}$, donc il est nul et on voit qu'il y a au moins deux valeurs de u qui, pour $z = \alpha$, se réduisent à β. Il se peut que d'autres coefficients soient nuls ; si A_p est le premier coefficient qui ne soit pas nul, le développement prendra la forme :

$$z - \alpha = A_p (u - \beta)^p + A_{p+1} (u - \beta)^{p+1} + \dots$$

Quand z tend vers α, il y a p valeurs de u qui tendent vers β ; et qui se permutent circulairement autour du point α ; l'intégrale considérée se conduit donc, aux environs de la valeur $z = \alpha$, comme une fonction algébrique de z ; en d'autres termes, on a pour u un développement de la forme :

$$u = \beta + B_1 (z - \alpha)^{\frac{1}{p}} + B_2 (z - \alpha)^{\frac{2}{p}} + \dots$$

Le point $z = \alpha$ est donc un point singulier algébrique pour l'intégrale considérée.

Remarque. — Il peut se faire que tous les coefficients A soient nuls ; les dérivées partielles de la fonction φ prises par rapport à u sont donc toutes nulles pour $z = \alpha$, $u = \beta$ et par suite cette fonction est de la forme :

$$\varphi\,(u.z) = (z-\alpha)^q\, \psi\,(u.z),$$

$\psi\,(u.z)$ étant une fonction qui ne contient plus le facteur $z - \alpha$.

Dans ce cas, l'équation $\frac{dz}{du} = (z-\alpha)^q\, \psi\,(u.z)$ est vérifiée pour $z = \alpha$, et d'après le théorème de Cauchy, il n'existe pas d'autre intégrale se réduisant à α, quelle que soit, d'ailleurs, la valeur initiale attribuée à u. Donc l'équation proposée n'admet pas d'intégrale prenant une valeur donnée β pour $z = \alpha$.

IV — Nous appliquerons le théorème précédent à une équation d'une forme assez générale.[1] Supposons que l'on ait $f(u.z) = \frac{P}{Q}$, P et Q étant des polynomes entiers par rapport à u ; en d'autres termes, soit

$$\frac{du}{dz} = \frac{A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_p u^p}{B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \dots + B_q u^q}.$$

Les fonctions A_i B_j étant des fonctions de z supposées uniformes dans tout le plan ; on peut se proposer de chercher dans quel cas une pareille équation pourra avoir toutes ses intégrales uniformes.

Soit α une valeur de z qui ne soit singulière pour aucune des fonctions A_i, B_j, qui n'annule pas B_0, et enfin qui n'annule pas le résultat de l'élimination de u entre les deux équations $P = 0$, $Q = 0$. Dans ces conditions, si on y fait $z = \alpha$, l'équation $Q = 0$ admet q racines. Soit β l'une d'elles. Pour le système de valeurs $z = \alpha$, $u = \beta$, le coefficient différentiel devient infini, l'inverse s'annule tout en restant holomorphe ; de plus, ce coefficient différentiel ne contient en facteur aucune puissance négative de $z - \alpha$ puisque B_0 n'est pas nul pour $z = \alpha$. Par conséquent, il existe une intégrale se réduisant à β pour $z = \alpha$, et qui admet le point α comme point critique algébrique. Cette intégrale n'est pas uniforme. Ainsi, une condition nécessaire est qu'à la valeur α de z, il ne corresponde aucune racine de l'équation $Q = 0$ et par suite l'exposant q doit être nul.

Nous devons donc ne considérer que les équations de la forme :

$$\frac{du}{dz} = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_p u^p.$$

---

[1] Voir le cours d'analyse de Mr Picard, (Tome II, p. 326) Painlevé (Lignes singulières des fonctions analytiques, page 43.)

D'autre part si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, il vient :

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{A_0 v^p + A_1 v^{p-1} + \dots + A_p}{v^{p-2}}$$

et les intégrales devront être également toutes uniformes. D'après ce qu'on vient de voir, le second membre devra se réduire à un polynôme, ce qui exige qu'on ait $p = 2$. Ainsi toute équation de la forme considérée qui n'aura que des intégrales uniformes aura pour second membre un trinôme du second degré en u ; l'équation générale :

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = Au^2 + Bu + C$$

où $A B C$ sont des fonctions de z, s'appelle équation de Riccati ; l'intégrale générale ne sera d'ailleurs uniforme que si A, B, C satisfont à de certaines conditions.

V – Equation de Riccati – Equation Linéaire — L'équation de Riccati présente un intérêt particulier tant au point de vue de ses points critiques qu'au point de vue des relations qui existent entre ses intégrales : Le second membre de l'équation (1) en ce qui concerne u, ne cesse d'être holomorphe que pour u infini. Soit $z = \alpha$ une valeur de z pour laquelle une certaine intégrale devienne infinie, la transformation $u = \frac{1}{v}$ donne :

$$\frac{dv}{dz} = -A - Bv - Cv^2.$$

Si α est un point singulier d'une des fonctions A, B, C, il est évidemment fixe, c'est à dire indépendant de toute particularisation de l'intégrale ; sinon le second membre étant holomorphe pour $z = \alpha$, $v = 0$, v sera holomorphe dans le voisinage du point α qui sera un simple pôle de l'intégrale u considérée. Donc l'équation de Riccati n'a, comme points critiques mobiles que des pôles.

Nous retrouverons tout à l'heure cette propriété ; pour le moment nous nous arrêterons à un cas particulier, celui où $A = 0$. L'équation (1) prend alors la forme linéaire :

$$(2) \qquad \frac{du}{dz} = Pu + Q.$$

Soit u_1 une solution particulière de cette équation, on aura évidemment :

$$(3) \qquad \frac{d(u - u_1)}{dz} = P(u - u_1).$$

D'où l'on déduira u à l'aide d'une quadrature : $u = u_1 + Ce^{\int P\,dz}$

D'ailleurs si u_2 est une seconde solution particulière on aura une relation analogue à (3), et en divisant membre à membre:

$$\frac{d(u-u_1)}{d(u-u_2)} = \frac{u-u_1}{u-u_2}.$$

D'où l'on déduit:

$$\frac{u-u_1}{u-u_2} = \text{constante},$$

pour l'intégrale générale. On en conclut d'abord que: Trois solutions quelconques de l'équation linéaire forment une proportion. On peut d'ailleurs écrire

$$u = \frac{u_1 - Cu_2}{1-C} = \frac{u_1+u_2}{1-C} - u$$

et en posant $\frac{1}{1-C} = C'$:

$$(4) \qquad u = C'(u_1+u_2) - u_2.$$

C' étant une constante arbitraire, la constante entre donc linéairement dans l'expression de l'intégrale générale; si d'ailleurs on élimine la constante entre l'équation (4) et sa dérivée, on retrouve évidemment une équation linéaire; donc les propriétés que nous venons d'énoncer sont caractéristiques de l'équation linéaire. L'équation (4) met aussi en évidence ce fait que, l'équation linéaire n'a que des points critiques fixes, puisque les points critiques ne peuvent être que ceux des fonctions u_1 u_2 qui sont choisies une fois pour toutes.

Revenons maintenant à l'équation de Riccati; on la ramène sans difficulté à une équation linéaire quand on connaît une solution particulière u_1, il suffit en effet de poser:

$$u = u_1 + \frac{1}{v} \text{ d'où } \frac{dv}{dz} + (2A+B)v + C = 0;$$

les conséquences de cette transformation apparaissent d'une manière pour ainsi dire évidente:

1°– Les points critiques de u sont ceux de u_1 qui sont fixes et ceux de $\frac{1}{v}$; les points singuliers de v étant tous fixes, on en conclut que les seuls points singuliers mobiles de u sont les zéros de v et par suite se réduisent à des pôles.

2°– La valeur générale de v sera de la forme $C\varphi(z)+\psi(z)$, C étant la constante arbitraire; donc l'intégrale générale de l'équation de Riccati sera de la forme:

$$u = \chi(z) + \frac{1}{C\varphi(z)+\psi(z)},$$

φ, ψ, χ étant trois fonctions connues.

3°. Si on connaît deux autres solutions u_2, u_3 de l'équation (1) on en déduira pour l'équation en v les deux solutions :

$$v_1 = \frac{1}{u - u_2} \quad v_2 = \frac{1}{u - u_3} .$$

Si on écrit que trois solutions v, v_1, v_2 forment une proportion, on en conclut que l'intégrale générale sera :

$$\frac{\frac{1}{u-u_1} - \frac{1}{u-u_2}}{\frac{1}{u-u_1} \quad \frac{1}{u-u_3}} = \frac{(u_1-u_2)(u-u_3)}{(u_1-u_3)(u-u_2)} = \text{constante}.$$

Donc quatre solutions quelconques de l'équation de Riccati ont un rapport anharmonique constant.

Comme pour l'équation linéaire, cette propriété caractérise l'équation de Riccati, car c'est évidemment à une telle équation qu'on est conduit quand on élimine la constante entre l'équation et sa dérivée.

VI. Équation de Bernouilli. — L'équation linéaire peut être considérée comme un cas particulier de la suivante qu'on appelle équation de Bernouilli :

$$\frac{du}{dz} = Pu + Qu^m,$$

P, Q étant des fonctions de z. On peut toujours en ramener l'intégration aux quadratures.

Posons en effet $u = \lambda v$, λ étant une fonction indéterminée, v la nouvelle fonction inconnue, nous aurons alors :

$$\lambda \frac{dv}{dz} + v \frac{d\lambda}{dz} = P\lambda v + Q\lambda^m v^m .$$

Nous pouvons disposer de λ de manière à faire disparaître le terme en v il suffit de poser :

$$d\lambda = P\lambda\, dz \qquad \lambda = e^{\int_{z_0}^{z} P dz} = \varphi(z) ,$$

z_0 étant choisi comme on voudra, l'équation précédente se simplifie alors et devient :

$$\frac{dv}{dz} = Q\varphi^{m-1} v^{m-1} ,$$

elle s'intègre indistinctement par une quadrature et on a en désignant par c la constante :

$$\frac{1}{(m-1)v^{m-2}} = c + \int_{z_0}^{z} Q\varphi^{m-1}(z)\,dz.$$

La valeur générale de u sera $v\,\varphi(z)$.

Remarque — Quand on connaît une solution de l'équation de Riccati on peut la réduire à la forme linéaire et par suite l'intégrer par deux quadratures ; la connaissance d'une ou de deux autres solutions abaisserait à une ou à zéro le nombre des quadratures nécessaires à l'intégration. – Ce théorème est important au point de vue de certaines applications géométriques. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'obtenir toutes les développées d'une ligne à double courbure C, par chaque tangente on peut mener deux plans isotropes on a ainsi deux surfaces développables dont les arêtes de rebroussement fournissent deux solutions particulières du problème, car toute courbe tracée sur une pareille surface est une trajectoire orthogonale des génératrices. – Or la méthode donnée par Bonnet pour obtenir les développées conduit à une équation de Riccati dont on connaît ainsi deux solutions particulières. – Le problème peut donc s'achever à l'aide d'une seule quadrature.

IVe Leçon.

Solutions singulières des équations du 1er Ordre.

I — Nous avons appelé intégrale générale, la solution fournie par le théorème de Cauchy ; elle contient une constante arbitraire dont on peut disposer de telle sorte que la fonction prenne, pour une valeur déterminée de la variable, telle valeur que l'on veut ; nous désignerons sous le nom de **solution singulière** une intégrale qui, pour aucune valeur de la constante arbitraire, ne rentre dans l'intégrale générale. – Par exemple, l'équation [1]

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{y-x}$$

---

[1] Sans restreindre la généralité des variables, c'est à dire en les considérant toujours comme des quantités complexes, nous les représenterons dorénavant par x, y, cette notation étant mieux appropriée aux considérations géométriques auxquelles nous aurons souvent recours.

est évidemment vérifiée par $y = x$; or son intégrale générale s'obtient sans difficulté ; il suffit de poser :

$$y = x + z^2,$$

d'où

$$\frac{2\,dz}{dx} = z - 1 \quad -z = \frac{x}{2} + c \quad y = x + \left(\frac{x}{2} + C\right)^2 ;$$

il est clair qu'on ne peut obtenir la solution $y = x$, pour aucune valeur de C. C'est donc une solution singulière ; géométriquement elle est représentée par une droite tangente à toutes les paraboles qui représentent les intégrales particulières.

Quand il y a une solution singulière il est toujours très aisé de le reconnaître a priori et de déterminer cette solution. Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un point quelconque de cette solution ; si la valeur $\frac{dy}{dx}$, déduite de l'équation différentielle était holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, il y aurait une intégrale particulière donnée par le théorème de Cauchy, se réduisant à β pour $x = \alpha$; et cette intégrale étant la seule solution possible coïnciderait avec l'intégrale considérée, qui dès lors ne serait plus singulière. Donc il faut que, tout le long de la solution singulière, la valeur de y', fournie par l'équation différentielle, cesse d'être une fonction continue et uniforme.

Dans l'exemple choisi plus haut y' cesse d'être holomorphe tout le long de la droite $y = x$; c'était donc cette droite qui, seule pouvait fournir une solution singulière. Si nous avions pris l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - x},$$

nous aurions pu affirmer l'absence de toute intégrale singulière.

En général les systèmes de valeurs pour lesquels l'équation donnée cesse de fournir une valeur finie et bien déterminée de y' sont donnés par une équation $P(x, y) = 0$ qu'on peut former a priori ; ce sera par exemple, si l'équation n'est pas résolue par rapport à y', le résultat de l'élimination de y' entre les deux équations :

$$f(x, y, y') = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Il restera à vérifier si la fonction définie par $P = 0$ satisfait ou non à l'équation donnée.

II — Enveloppe des Intégrales générales. — D'après ce qui précède, il n'y aura pas en général d'intégrale singulière car la fonction définie par $P = 0$ ne vérifiera pas ordinairement l'équation

donnée; il y a lieu de chercher, lorsque cette solution existe comment elle est liée aux intégrales générales.

Supposons pour fixer les idées que l'équation donnée:

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0$$

soit entière par rapport à y'; nous ne nous occuperons pas des valeurs de x, y qui rendent y' infini; il suffirait d'échanger entre elles la variable et la fonction pour faire disparaître ces singularités; Nous aurons donc seulement à considérer l'équation $P(x, y) = 0$ qui résulte de l'élimination de y' entre l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Soit α, β une solution de cette équation, et supposons, pour nous placer dans le cas le plus simple que l'équation (1) ait une racine double en y' pour un point quelconque $x = \alpha$, $y = \beta$ de $S = 0$ (Le raisonnement se généraliserait sans difficulté). — Dans le voisinage de α, β, l'équation en y' aura deux racines infiniment voisines dont la somme et le produit seront évidemment uniformes; on peut donc considérer y' comme donné, dans ce domaine, par une équation du 2e degré à coefficients holomorphes; en d'autres termes y' sera de la forme:

$$y' = A(x, y) + \sqrt{B(x, y)},$$

A, B étant holomorphes par $x = \alpha$, $y = \beta$. On aura d'ailleurs y_1 étant la solution singulière considérée:

$$A(x, y_1) = y_1' \qquad B(x, y_1) = 0.$$

Posons alors $y = y_1 + z^2$, et développons $A\, B$ suivant les puissances de z^2, nous avons:

$$\frac{dy_1}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = \varphi_0(x) + z^2\varphi_1(x) + z^4\varphi_2(x) + \cdots + \sqrt{\psi_0(x) + z^2\psi_1(x) + z^4\psi_2(x) + \cdots}$$

Mais $\psi_0(x) = 0$ et $\frac{dy_1}{dx} = \varphi_0(x)$; l'équation précédente est donc divisible par z; supprimons ce facteur, qui correspond à la solution singulière, il vient:

$$\frac{2\,dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^3\varphi_2(x) - \cdots + \sqrt{\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \cdots}$$

Dans le voisinage de tout point appartenant à $P = 0$ comme $\psi_1(x)$ est en général différent de 0, le second membre est une fonction holomorphe de x et de z; donc cette équation admet une solution holomorphe se réduisant à 0 pour $x = \alpha$; on a par suite une nouvelle solution:

$$y = y_1 + z^2,$$

qui rentre dans l'intégrale générale ; au point qui leur est commun ces deux intégrales se touchent puisque $z = 0$ et que par suite $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}$. Donc, par chaque point de la solution singulière passe une seconde solution rentrant dans l'intégrale générale en touchant la première au point considéré. En d'autres termes la solution singulière, quand elle existe, est l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale.

Il est clair que, réciproquement, si l'intégrale générale a une enveloppe, cette enveloppe fournira une solution de l'équation différentielle ; en effet, par tout point M de cette enveloppe passe une enveloppée qui la touche en ce point ; x, y, y' ont les mêmes valeurs pour l'enveloppe et pour l'enveloppée ; comme l'équation différentielle est vérifiée en chaque point de l'enveloppée elle l'est en particulier au point M. L'enveloppe fournit donc bien une solution ; d'ailleurs ce sera en général une solution singulière, l'enveloppe ne coïncidant avec aucune des enveloppées.

III – Equation de Clairaut – Prenons comme exemple, l'équation :

$$(2) \qquad y - x y' = \varphi(y').$$

le 1er membre représente l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe intégrale ; cette équation exprime donc une propriété commune à toutes les tangentes de cette courbe, propriété indépendante du point de contact. Il est évident que si une courbe C répond à la question, chacune de ses tangentes y répondra également ; les droites représentées par l'équation :

$$y = Cx + f(C)$$

fournissent donc l'intégrale générale de l'équation (2) ; la solution singulière sera donnée par l'enveloppe de ces droites ; pour obtenir cette enveloppe il faut éliminer C entre l'équation précédente et sa dérivée par rapport à C ; il revient au même d'éliminer y' entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à y' ; on retrouve bien pour solution singulière la courbe $P = 0$.

Remarque – C'est à l'occasion de l'équation de Clairaut qu'on a constaté l'existence d'une solution singulière ; en admettant que le faisceau des courbes intégrales a toujours une enveloppe on avait été conduit à considérer comme un fait normal l'existence de la solution singulière ; il n'en est rien. Pour qu'une famille de courbes admette une enveloppe, il est nécessaire que la constante

arbitraire figure d'une certaine manière dans l'équation du faisceau rien ne prouve que l'intégrale générale d'une équation du premier ordre satisfera toujours à cette condition ; ce qui précède nous prouve même que cela n'aura pas lieu en général ; nous allons maintenant étudier de plus près les conditions dans lesquelles il pourra y avoir une solution singulière.

IV — Reprenons les équations

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Désignons toujours par $P = 0$ le résultat obtenu par l'élimination de y'. - On peut regarder cette courbe P comme définie par les équations simultanées (1) (2) ; si alors nous différentions l'équation (1) par rapport à x en tenant compte de (2), il vient.

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

cette nouvelle équation doit avoir lieu tout le long de P ; en d'autres termes si $Q = 0$ est le résultat de l'élimination de y' entre les équations (1), (3) les courbes $P = 0$, $Q = 0$ devront coïncider tout le long de la solution singulière.

Réciproquement, si les courbes P et Q ont une partie commune C, cette courbe C fournira une intégrale de l'équation donnée ; en effet tout le long de C les équations (1) (2) (3) auront une racine commune, en la désignant par λ cette racine commune on aura :

$$(3) \quad f(x, y, \lambda) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Si le long de la courbe (C) définie par ces équations, ou, ce qui revient au même, par les deux premières, on dérive par rapport à x, on aura :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

d'où l'on conclut : $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(y' - \lambda) = 0$

En général $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sera pas identiquement nul le long de la courbe C ; on aura donc $\lambda = y'$ et par suite en substituant dans

la 1ère des équations (3):

$$f(x,y,y')=0$$

Donc $C=0$ fournira bien une intégrale de l'équation proposée.

Exemples. – 1° L'équation

$$\frac{dy}{dx}=1+\sqrt{y-x}$$

mise sous forme entière nous donne:

$$f(x,y,y')=(y'-1)^2+x-y \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}=y'-1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=1-y'$$

Les courbes P, Q coïncident avec la droite $y=x$. – Cette droite donne la solution singulière.

2° La seconde équation que nous avions considérée peut s'écrire:

$$(y'-2)^2+x-y=0 \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}=y'-2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=1-y'$$

Les équations des courbes $P=0$ $Q=0$ sont respectivement:

$$P)\ x=y \qquad Q)\ x-y+1=0.$$

Ces deux droites étant distinctes il n'y a pas de solution singulière.

3°. – Soit encore l'équation de Clairaut; on a ici:

$$f(xyy')=xy'-y+\varphi(y') \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=x+\varphi'(y') \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=y'-y'\equiv 0.$$

Ici la dernière équation se réduit à une identité, la courbe Q est complètement indéterminée; il y a donc une solution singulière, ainsi que nous l'avions constaté.

V – Signification géométrique des courbes P, Q — Lorsque les courbes $P=0$, $Q=0$ ne coïncident pas, ce qui est le cas général, elles ont l'une et l'autre une signification géométrique qui les relie très simplement, ainsi que l'a fait voir Mr Darboux[1], au faisceau des courbes intégrales. L'équation différentielle étant satisfaite identiquement, le long d'une intégrale quelconque, on aura en la différentiant par rapport à x:

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+y''\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

---

(1) Sur les solutions singulières des équations différentielles du 1er ordre. Bulletin des sciences mathématiques 1873

Ceci posé, considérons d'abord la courbe $Q = 0$; on a, au point où cette courbe coupe l'intégrale considérée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} \neq 0$$

y et y' désignant toujours des dérivées prises le long de l'intégrale en question ; On aura donc, le long de la courbe Q, $y'' = 0$.

La courbe $Q = 0$ est le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.

Soit (C) le faisceau des courbes intégrales ; faisons une transformation par polaires réciproques, en prenant pour conique directrice, par exemple la parabole $y^2 = 2x$; les formules de transformation seront :

$$x = -X + \frac{Y}{Y'} \quad y = \frac{1}{Y'} \qquad y' = \frac{1}{Y} \qquad \left(Y' = \frac{dY}{dX}\right)$$

Les courbes transformées (T) auront donc pour équation différentielle :

$$f\left(-X + \frac{Y}{Y'}, \frac{1}{Y'}\, \frac{1}{Y}\right) = \varphi(X\, Y\, Y') = f\left(-X + \frac{Y}{Y'}\, \frac{1}{Y'}, \frac{1}{Y}\right) = 0$$

Le lieu de leurs points d'inflexion s'obtiendra en combinant cette équation avec la suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} + Y' \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\frac{\partial f}{\partial x} + Y'\left(\frac{1}{Y'} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{Y^2} \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = -\frac{Y}{Y^2}\,\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Les points d'inflexion des courbes (T) sont donc les tranform des points où les courbes (C) rencontrent la courbe $P = 0$. Donc celle-ci est le lieu des points de rebroussement des courbes (C).

En résumé : Lorsqu'il y a une solution singulière, les courbes P Q coïncident en tout ou en partie, et leur partie commune donne la solution singulière. Lorsqu'il n'y a pas de solution singulière, c qui est le cas général, les deux courbes (P), (Q) sont distinctes et représentent l'une le lieu des points de rebroussement, l'autre le lieu des points d'inflexion des courbes représentées par l'intégrale générale.

Si nous revenons par exemple à l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - x}$$

nous aurons facilement son intégrale générale, en faisant la substitution $y = x + z^2$, on trouve ainsi :

$$\sqrt{y-x} - \mathrm{Log}\left(1 + \sqrt{y-x}\right) = \frac{x}{2} + C$$

La droite $y = x$ est le lieu des points de rebroussement des

courbes que représente cette équation ; le lieu de leurs points d'inflexion est la droite $x-y+1=0$.

Cinquième Leçon.

Cas où l'on peut ramener l'intégration aux quadratures.

I. Equation Homogène — L'étude d'une fonction définie par une équation différentielle présente de grandes difficultés ; la question se simplifie et doit être considérée comme résolue lorsqu'on peut exprimer x, y soit à l'aide de fonctions connues d'une même variable t, soit par des quadratures portant sur de telles fonctions ; car nous avons donné le moyen d'étudier les fonctions exprimées par des intégrales définies.

Nous avons vu comment on peut effectuer cette réduction pour l'équation linéaire, pour l'équation de Bernouilli, pour celle de Riccati quand on en connaît une solution particulière.

On dit que l'équation est homogène lorsque $\frac{dy}{dx}$ s'exprime par une fonction homogène et de degré 0 de x, y ; en d'autres termes lorsqu'elle est de la forme :

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

M, N étant deux fonctions homogènes de même degré p. Si nous posons alors :

$$y = ux \qquad M = x^p \varphi(u) \qquad N = x^p \psi(u)$$

nous obtiendrons immédiatement :

$$[u\psi(u) + \varphi(u)]\,dx + \psi(u)\,du = 0$$

D'où :

$$x = -\int \frac{\psi(u)}{u\psi(u) + \varphi(u)}\,du$$

on sera donc ramené à une quadrature.

Prenons comme exemple, l'équation :

$$(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$$

On a ici :

$$y = ux \qquad (u+u^2)\,dx + (u-1)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$2u^2\,dx + (u-1)\,x\,du = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{du}{u} - \frac{du}{u^2} = 0$$

L'intégrale est donc:

$$xye^{-\frac{x}{y}} = \text{Const}\ldots$$

On peut quelquefois ramener à être homogène une équation qui ne présente pas ce caractère. Soit, par exemple, l'équation:

$$(2) \qquad (ax+by+c)\,dx + a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes; si on désigne par ξ η deux nouve variables, par α, β deux constantes, il suffira de poser:

$$x = \xi + \alpha \qquad y = \eta + \beta,$$

et l'équation deviendra homogène si on détermine α, β, par la conditio qu'on ait:

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \qquad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Ce procédé serait en défaut si l'on avait $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$; mais dans ce cas, en désignant par K la valeur commune de ces deux rapports, l'équation (1) s'intègre immédiatement; elle peut en effet s'écrire:

$$(ax+by+c)\,dx + K\left(ax+by+\frac{c'}{K}\right)dy = 0$$

et il suffit de poser

$$ax + by + c = u,$$

pour la ramener à la forme:

$$(mu+n)\,dx + (pu+q)\,du = 0$$

d'où

$$x = -\int \frac{pu+q}{mu+n}\,du$$

Considérons, au lieu de l'équation homogène, l'équation plu générale:

$$(3) \qquad M\,(x\,dy - y\,dx) + P\,dy + Q\,dx = 0$$

où M, P, Q sont des fonctions homogènes de degrés n, p, p. Si nous posons encore:

$$y = ux \qquad M = x^n\varphi(u) \qquad P = x^p\psi(u) \qquad Q = x^p\chi(u),$$

l'équation devient :

$$\frac{dx}{du}\left(u\varphi+\chi\right)+x\psi(u)+x^{m-p-2}\varphi(u)=0.$$

C'est une équation de Bernouilli qu'on ramène aux quadratures par le procédé que nous avons indiqué.

II _ Equation de Mr Darboux _ Si on substitue aux variables x, y les coordonnées homogènes $x\ y\ z$, l'équation (3) prend la forme symétrique :

$$(4)\quad M(y\,dz-z\,dy)+N(z\,dx-x\,dz)+P(x\,dz-y\,dx)=0$$

M, N, P étant trois fonctions homogènes et d'un même degré $\underline{m}$. Cette équation, dans le cas où M, N, P sont des polynômes a été étudiée par Mr Darboux ; on peut la mettre sous la forme :

$$(5)\quad (Nz-Py)\,dx+(Px-Mz)\,dy+(My-Nx)\,dz=0.$$

Si on égale à 0 les coefficients de dx, dy dz, on a deux équations distinctes représentant deux courbes qui se coupent en $(m+1)^2$ points (α) ; pour ces points la tangente à la courbe intégrale n'est pas déterminée par l'équation (5). _ Il est bien évident qu'il ne peut y avoir plus de $m+1$ points (α) sur une droite D ; sinon cette droite ferait partie de chacune des courbes :

$$(6)\quad Nz-Py=0 \qquad Px-Mz=0 \qquad My-Nx=0,$$

et l'équation (5) serait divisible par un facteur qu'il faudrait supprimer.

Nous allons faire voir que si une droite D passe par $m+1$ points α, son équation fournit une solution de l'équation (4).

Remarquons en effet qu'une transformation homographique conserve la forme de l'équation (1) et le caractère des points singuliers (α) ; prenons la droite considérée comme axe des x. Puisque l'axe $y=0$ coupe les courbes (6) en $m+1$ points chacune, le polynôme N doit être identiquement nul ; l'équation prend alors la forme :

$$M(y\,dz-z\,dy)+P(x\,dy-y\,dx)=0$$

elle est évidemment vérifiée pour $y=0$, $dy=0$. L'axe des x fournit donc bien une intégrale.

En général, considérons une équation entière et homogène

$$f(x, y, z)=0$$

Si p est son degré et si cette équation fournit une intégrale on aura, tout le long de cette intégrale :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=pf=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$\frac{y\,dz-z\,dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{z\,dx-x\,dz}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{x\,dy-y\,dx}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

d'où :

$$M\frac{\partial f}{\partial x}+N\frac{\partial f}{\partial y}+P\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

En d'autres termes, l'expression précédente devra être divisible par f puisqu'elle s'annule pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z qui annulent f. On aura donc :

$$(7) \qquad M\frac{\partial f}{\partial x}+N\frac{\partial f}{\partial y}+P\frac{\partial f}{\partial z}=Qf,$$

Q étant un polynôme de degré $m-1$.

Ce théorème peut servir à trouver certaines intégrales algé[bri]ques de l'équation proposée ; M.r Darboux a d'ailleurs montré qu'i[l] suffit de connaître un certain nombre d'intégrales de cette nature po[ur] obtenir par quadratures, l'intégrale générale. ———— Nou[s] nous contenterons d'examiner un cas particulier.

III – Équation de Jacobi

— L'équation de Jacobi est la suivante :

$$(8) \quad (ax+by+cz)(y\,dz-z\,dy)+(a'x+b'y+c'z)(z\,dx-x\,dz)+(a''x+b''y+c''z)(x\,dy-y\,dx)=$$

On peut chercher des intégrales linéaires, c'est à dire de la forme

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

Si on écrit la condition (7) en remarquant que Q se réduit à u[ne] constante S, on aura :

$$(9) \qquad \begin{aligned}(a-S)\alpha+a'\beta+a''\gamma&=0\\ b\alpha+(b'-S)\beta+b''\gamma&=0\\ c\alpha+c'\beta+(c''-S)\gamma&=0\end{aligned}$$

α, β, γ ne pouvant pas être nuls ensemble, on devra avoir :

$$\begin{vmatrix} a-S & a' & a'' \\ b & b'-S & b'' \\ c & c' & c''-S \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est du 3e degré ; à chaque racine les équations (8) feront correspondre une droite fournissant une intégrale ; il est maintenant facile d'en déduire l'intégrale générale. Désignons en effet par $X=0, Y=0, Z=0$ les trois intégrales trouvées ; si nous prenons les trois droites correspondantes pour former le triangle de référence, l'équation se transformera dans la suivante :

$$M(YdZ - ZdY) + N(ZdX - XdZ) + P(XdY - YdX) = 0$$

et comme elle doit être vérifiée identiquement par $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $M\,N\,P$ sont respectivement divisibles par X, Y, Z. On aura donc en désignant par $\lambda\ \mu\ \nu$ trois constantes :

$$(\mu - \nu)\frac{dX}{X} + (\nu - \lambda)\frac{dY}{Y} + (\lambda - \mu)\frac{dZ}{Z} = 0$$

Dont l'intégrale générale est évidemment :

$$X^{\mu-\nu} \times Y^{\nu-\lambda} \times Z^{\lambda-\mu} = C.$$

On peut remarquer que les droites X, Y, Z forment l'un des triangles inscrits à la fois aux trois coniques,

$$My - Nx = 0 \qquad Nz - Px = 0 \qquad Py - Nz = 0$$

La solution précédente revient à prendre ce triangle comme triangle de référence

IV — Équations non résolues par rapport à y' —

Nous avons supposé jusqu'ici l'équation différentielle résolue par rapport à y'. Supposons que cela n'ait pas lieu ; il peut arriver qu'elle soit résoluble par rapport à x ou à y, ces deux cas se ramènent l'un à l'autre si on échange entre elles la variable et la fonction. Supposons donc qu'on ait :

$$(10) \qquad y = f(x, p)$$

p étant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. En différentiant par rapport à x, il vient :

$$(11) \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{dx}.$$

Cette dernière équation (11) est résolue par rapport à la dérivée $\frac{dp}{dx}$; si elle rentre dans l'une des formes particulières que nous avons rencontrées, nous pourrons obtenir son intégrale générale.

Supposons que cette intégrale soit :

$$(12) \quad p = F(x, C).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (10), il vient :

$$(13) \quad y = f(x\, F)$$

cette équation contenant une constante arbitraire, définira l'intégrale générale, si nous démontrons qu'elle satisfait à l'équation (10) ; il est aisé de le vérifier ; en effet on déduit de (12) :

$$y' \; \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

Mais l'équation (12) étant l'intégrale de l'équation (11) nous avons quelle que soit la constante c.

$$F(x, c) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial F} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

D'où en rapprochant cette relation de la précédente :

$$y' = F(x, c)$$

y' étant la dérivée déduite de l'équation (13) ; on aura donc bien, à cause de cette même équation (13) :

$$y = f(x, y')$$

L'équation (10) est donc vérifiée.

Remarque — Si on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) sous une forme non résolue par rapport à p, on devrait considérer l'intégrale comme repésentée par cette relation et l'équation donnée, x y étant des fonctions d'un paramètre variable p.

V — Equation de Lagrange et de Clairaut —

Lorsque l'équation (10) est du premier degré par rapport à x, l'équation (11) est linéaire et par suite réductible aux quadratures. On a en effet

$$(14) \quad y = x\,\varphi(p) + \Psi(p)$$

et, en différentiant par rapport à x :

$$(15) \qquad p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

équation linéaire si on y considère x comme une fonction de p.

L'équation (14) comprend comme cas particulier celle de Clairaut :

$$y = px + \psi(p)$$

dont nous nous sommes occupés à propos des solutions singulières. – Dans ce cas particulier, l'équation (15) se simplifie et devient :

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0$$

Elle se scinde en deux facteurs ; le 1er donne l'intégrale $p = c$ et par suite la solution générale sous la forme :

$$y = cx + \psi(c)$$

Le second facteur définit la solution singulière par l'ensemble des deux équations :

$$y = px + \psi(p) \qquad x + \psi'(p) = 0$$

C'est l'enveloppe des droites données par l'intégrale générale. –

Nous avons remarqué que l'équation de Clairaut est l'équation générale des courbes dont les tangentes satisfont à une condition donnée indépendante du point contact. – Lorsqu'il s'agit de déterminer une courbe dont les normales satisfont à une condition de cette nature on est conduit à une équation de la forme :

$$(12) \qquad x + py = f(p)$$

Les équations de cette forme, se ramènent sans difficulté aux quadratures. – Si on différentie, qu'on multiplie par p et qu'on remplace $p\,dx$ par dy l'équation précédente devient.

$$dy\,(1+p^2) + py\,dp = p\,f'(p)\,dp.$$

D'où en divisant par $\sqrt{1+p^2}$:

$$\sqrt{1+p^2}\;dy + \frac{yp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \frac{pf'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Mais le premier membre est une différentielle exacte et en intégrant on est conduit à l'équation :

$$(13) \qquad y\sqrt{1+p^2} = \int \frac{p f'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Les équations (12) et (13) fournissent explicitement x et y en fonction du paramètre p.

VI _ Cas où l'une des variables manque. _

Nous dirons quelques mots pour terminer, des équations de la forme :

$$f(y, y') = 0$$

qui ont été étudiées par Briot et Bouquet. - Supposons que l'équation soit, par exemple, du 5ème degré par rapport à y', pour chaque valeur de y, la dérivée $\frac{dx}{dy}$ de la fonction inverse sera susceptible de cinq valeurs que nous représenterons par :

$$\varphi_1(y) \quad \varphi_2(y) \quad \varphi_3(y) \quad \varphi_4(y) \quad \varphi_5(y)$$

Supposons maintenant que l'équation donnée admette une intégrale uniforme ; la fonction inverse sera susceptible de valeurs, en nombre fini ou infini,

$$x_1 \; x_2 \, \text{----} \; x_p \, \text{----}$$

Les dérivées de ces valeurs de x par rapport à y ne pouvant prendre que les cinq valeurs distinctes écrites plus haut, si nous désignons par x_1 x_2 .... x_5 cinq valeurs de $\underline{x}$ donnant lieu à des dérivées distinctes, toute autre valeur x_p satisfera à l'une des équations :

$$\frac{d(x_p - x_1)}{dy} = 0 \qquad \frac{d(x_p - x_2)}{dy} = 0 \,\text{.....}\, \frac{d(x_p - x_3)}{dy} = 0$$

d'où l'on conclut

$$x_p = \varphi_i(y) + \omega$$

ω étant une constante et $\underline{i}$ l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ; donc si l'équation proposée admet une intégrale uniforme $y = \psi(x)$ l'équation $\psi(x) = b$ où $\underline{b}$ serait une constante, n'admettra qu'un nombre limité de racines, abstraction faite de certaines périodes - Nous avons vu (11e partie, page 90) que dès lors la fonction $\psi(x)$ ne peut être que rationnelle, ou composée rationnellement avec une exponentielle, de la forme $e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}$, ou méromorphe et doublement périodique.

Il est évident que $\psi'(x)$ sera alors de la même forme que $\psi(x)$; donc ψ et ψ' devront être liées par une relation qui coïncidera avec

l'équation donnée ; en outre, dans les deux premiers cas Ψ et Ψ' seront des fonctions rationnelles d'un paramètre donc la courbe $f(X,y)=0$, sera unicursale ; dans le 3° cas Ψ et Ψ' étant des fonctions elliptiques cette courbe sera de genre un. En résumé :

Pour que l'équation $f(y\,y')=0$ admette une intégrale uniforme, il faut que cette équation supposée entière par rapport à y' soit algébrique et que la courbe $f(Xy)=0$ soit unicursale ou de genre 1.

Cette condition n'est pas suffisante, mais lorsqu'elle est remplie on peut, dans tous les cas ramener l'intégration aux quadratures. On a en effet deux équations de la forme :

$$y=\varphi(t) \quad y'=X(t)$$

φ, X étant des fonctions rationnelles, ou doublement périodiques du paramètre t. Or si on différentie la première en tenant compte de la seconde, il vient :

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(t)\frac{dt}{dx}=X(t)$$

D'où :

$$x\int\frac{\varphi'(t)}{X(t)}\,dt \quad y=\varphi(t)$$

x et y sont donc exprimés explicitement en fonction de t.

Exercices sur la 5ème Leçon.

1° — Trouver une courbe plane telle que la projection de la normale sur l'axe des y ait une longueur constante $2a$.

L'équation différentielle est :

$$y(1+y'^2)=2a$$

On peut obtenir x immédiatement par une quadrature :

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{2a}{y}-1}}$$

mais il est préférable ici d'exprimer rationnellement y et y' en fonction d'un paramètre ; on a alors :

$$y=\frac{2a}{1+p^2} \quad y'=p$$

Différentiant la première équation et tenant compte de la seconde :

$$dx = \frac{-4\,a\,dp}{(1+p^2)^2}.$$

D'où en posant

$$y = 2a\cos^2 t \qquad x = C + \frac{a}{2}\sin 2t - at,$$

on reconnaît les équations d'une cycloïde.

2° Courbe telle que l'arc soit égal à la projection de l'ordonnée sur la tangente.– Si on appelle α l'angle de la tangente avec l'axe oX, on a :

$$y \times \sin\alpha = s$$

d'où :

$$dy\sin\alpha + y\cos\alpha\,d\alpha = \frac{dy}{\sin\alpha} \qquad \frac{dy}{y} - \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

d'où :

$$y\cos\alpha = C$$

Si maintenant on remplace $\cos\alpha$ par $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ on obtient immédiatement :

$$dx = \frac{c\,dq}{\sqrt{y^2-c^2}} \qquad x = \int\frac{c\,dq}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

En achevant la quadrature on a l'équation d'une chaînette.

3° Lignes de Courbure de l'ellipsoïde – Les lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

sont déterminées par l'équation :

$$A(B-C)x\,dy\,dz + B(C-A)y\,dz\,dx + C(A-B)z\,dx\,dy = 0$$

Si on pose :

$$x^2 = \xi \quad y^2 = \eta \quad z^2 = \zeta.$$

ces deux équations deviennent :

$$A(B-C)\xi\, d\eta\, d\zeta + B(C-A)\eta\, d\zeta\, d\xi + C(A-B)\zeta\, d\xi\, d\eta = 0$$

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 1$$

Si on élimine ζ et $d\zeta$ à l'aide de la seconde, on aura, pour la projection des lignes de courbure sur le plan des xy :

$$AB\left(\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left[(B-c)\frac{d\eta}{d\xi} + A - c\right] + (A-B)c\,\frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

C'est une équation de Clairaut. — L'intégrale générale s'obtiendra en y remplaçant $\frac{d\eta}{d\xi}$ par une constante λ ; on a donc ; en revenant aux variables x, y :

$$(AB)\,(y^2 - \lambda x^2)\left[(B-c)\lambda + A - c\right] + (A+B)c\lambda = 0$$

Les lignes de courbures se projettent donc suivant cette famille de coniques ; leur enveloppe donne la solution singulière :

$$\left[\left(y\sqrt{B-C} + x\sqrt{C-A}\right)^2 + c\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\right]\left[\left(y\sqrt{B-C} - x\sqrt{C-A}\right)^2 + c\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right] = 0$$

C'est un système de quatre droites.

4°. — Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes — Étant donnée une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre $\underline{a}$ et ayant pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

toute courbe qui coupe sous un même angle V toutes les courbes de ce faisceau est une trajectoire.

Or si on se déplace le long d'une trajectoire, le coefficient angulaire, de cette trajectoire et celui de la courbe C qui le coupe en un point xy sont $\frac{dy}{dx}$; $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$. On a donc :

$$(2) \qquad \operatorname{Tg} V = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial x}dx}{\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy}$$

Si on élimine $\underline{a}$ entre les équations (1) (2) on aura l'équation différentielle des trajectoires. Dans le cas des trajectoires orthogonales

l'équation (2) se réduit à :

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$

Prenons comme exemple la famille de coniques homofocales:

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}=1$$

Ici λ est le paramètre, l'équation (3) est:

$$\frac{a+\lambda}{x\,dy} = \frac{b+\lambda}{y\,dx} = \frac{b+a}{y\,dx-x\,dy}$$

Si on élimine λ on a pour l'équation des trajectoires orthogonales:

$$(x\,dy-y\,dx)(x\,dx+y\,dy)=(a-b)\,dx\,dy$$

Si on fait encore $y^2=\eta$, $x^2=\xi$, on obtient :

$$(\xi\,d\eta-\eta\,d\xi)(d\xi+d\eta)=d\xi\,d\eta\,(a-b),$$

qui est une équation de Clairaut ; si on y remplace $\frac{d\eta}{d\xi}$ par une constante C, on a l'intégrale générale:

$$Cx^2-y^2=\frac{C(a-b)}{1+C}$$

Elle représente des coniques homofocales aux proposées. La solution singulière est le quadrilatère isotrope ayant les foyers pour sommets.

Sixième et Septième Leçons.

Facteurs Intégrants. – Groupes de transformation.

I – Facteurs Intégrants – L'équation du premier ordre :

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

s'intègre immédiatement lorsque les variables sont séparées, c'est-à-dire lorsque M est une fonction de x, N une fonction de y ; plus généralement quand le premier membre est la différentielle exacte d'une fonction φ de deux variables, car l'équation est alors équivalente à $\varphi =$ constante.

On peut, dans le cas général, chercher à multiplier l'équation par un facteur μ tel que son premier membre devienne une différentielle exacte ; ce facteur est déterminé par l'équation.

$$\frac{\partial (M\mu)}{\partial y} - \frac{\partial (N\mu)}{\partial x} = 0$$

ou

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0$$

Cette équation est aux dérivées partielles du premier ordre ; son intégration pourra se faire complètement quand on connaîtra une solution particulière.

Supposons en effet que μ_1 soit une pareille solution ; l'expression $\mu_1 (M\,dx + N\,dy)$ sera la différentielle d'une fonction $\varphi_1(x, y)$ et l'intégrale générale de l'équation (1) sera $\varphi_1 =$ constante. Soit maintenant μ une solution quelconque de l'équation (2) de sorte qu'on ait :

$$d\varphi_1 = \mu_1 (M\,dx + N\,dy) \qquad d\varphi = \mu (M\,dx + N\,dy).$$

Les fonctions φ_1, φ, ayant leurs dérivées partielles proportionnelles, sont fonctions l'une de l'autre ; on a par conséquent :

$$\varphi = F(\varphi_1)$$

d'où en dérivant par rapport à x :



$$\mu M = F'(\varphi_1)\, \mu_1 M$$

$$\mu = \mu_1 F'(\varphi_1).$$

Donc toute solution de l'équation (2) s'obtiendra en multipliant μ_1 par une fonction de φ_1 ;

Cette fonction de φ_1 est d'ailleurs arbitraire ; si on substitue en effe $\mu_1 \lambda(\varphi_1)$ dans le 1er membre de l'équation (2) divisée par μ_1, on trouve :

$$\frac{M}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{N}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + M\frac{\partial \mu_1}{\partial y} - N\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\lambda'}{\lambda}\left(M\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - N\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)$$

résultat évidemment nul.

Remarquons enfin que si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation (1) on sait intégrer l'équation (2) ; car si on met cette intégra sous la forme u = constante, il est visible que la fonction $\frac{1}{M}\frac{\partial u}{\partial y}$ sera un facteur intégrant et fournira par conséquent une solution particulière de l'équation (2).

En résumé, l'équation (1) admet une infinité de facteurs intégra la connaissance d'un seul d'entre eux fournit à la fois l'intégrale génér et l'ensemble de tous les autres facteurs. L'intégration de l'équation (1) et celle de l'équation (2) ne sont qu'une seule et même fonction.

II. Recherche d'un facteur intégrant. — La recherche d'une solution particulière de l'équation (2), sera d'après ce qui précède, auss difficile que l'intégration même de l'équation (1). Il peut arriver, cependant que dans certains cas particuliers on obtienne assez aisément un facteur d'intégrabilité. Considérons par exemple l'équation linéaire :

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

On a ici $M = Py + Q$, $N = 1$ et l'équation (2) devient :

$$(Py+Q)\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu P = 0.$$

Si on suppose $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ on est ramené à trouver une fonction de x satisfaisant à la condition :

$$\frac{d\mu}{dx} = P\mu \qquad \mu = e^{\int P dx};$$

on a ainsi un facteur qui permet d'achever l'intégration.

Soit l'équation homogène :

$$M\,dx + M\,dy = 0$$

Le procédé que nous avons suivi pour l'intégrer met en évidence un facteur intégrant. En effet, multiplions d'abord par $\frac{1}{N}$ et soit $\frac{M}{N} = \varphi(u)$, u désignant $\frac{y}{x}$; elle deviendra :

$$[\varphi(u) + u]\,dx + x\,du = 0.$$

Elle admet évidemment comme facteur intégrant :

$$\frac{1}{x\varphi(u)+y} = \frac{1}{x\frac{M}{N}+y}$$

Donc, l'équation donnée sous sa forme primitive, admettait le facteur :

$$\frac{1}{Mx+Ny}.$$

On peut déduire, de la théorie du facteur, un procédé d'intégration lorsqu'on sait décomposer l'équation donnée en deux parties séparément intégrables. Supposons l'équation mise sous la forme :

$$(M\,dx+N\,dy)+(M_1\,dx+N_1\,dy)=0$$

Si on sait intégrer séparément les deux équations :

$$M\,dx+N\,dy=0 \qquad M_1\,dx+N_1\,dy=0,$$

on connaîtra la forme générale des facteurs intégrants pour chacune d'elles ; on cherchera alors à disposer des fonctions arbitraires de manière à obtenir un facteur qui convienne à l'une et à l'autre des deux expressions ; on aura ainsi un facteur de l'équation proposée.

Soit par exemple :

$$ay\,dx+bx\,dy+x^p y^q(my\,dx+nx\,dy)=0$$

On trouve immédiatement que les formes générales des facteurs sont respectivement :

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b) \qquad \frac{1}{x^{p+1}y^{q+1}}\psi(x^m y^n)$$

pour chacune des expressions :

$$(ay\,dx+bx\,dy \qquad x^p y^q(my\,dx+nx\,dy).$$

Les fonctions φ, ψ étant arbitraires, cherchons à les déterminer de telle sorte qu'on ait :

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b)=\frac{1}{x^{p+1}y^{q+1}}\psi(x^m y^n),$$

ou encore :

$$\frac{\psi'(x^m y^n)}{\varphi(x^a y^b)}=x^p y^q$$

Si on pose $\varphi(x^a y^b) = [x^a y^b]^h$ $\quad \Phi(x^m y^n) = x^{mk} y^{nk}$,
On aura pour déterminer h et K :

$$mK = ah + p \qquad nK = bh + q$$

On en tirera h et K et on aura un multiplicateur commun qui sera :

$$h = x^{ah-1} \cdot y^{bk-1} .$$

On en déduit sans difficulté l'intégrale :

$$\frac{1}{h} x^{ah} y^{bh} = \frac{1}{K} x^{mK} y^{nK} + C.$$

Si les équations qui donnent h, K étaient incompatibles, l'équation proposée s'intégrerait immédiatement.

III – Groupes de Transformations à un paramètre – La théorie des équations différentielles peut être rattachée à une théorie très importante, celle des groupes de transformations à un paramètre. Considérons deux équations de la forme :

$$(1) \qquad x_1 = f(x, y, \alpha) \qquad y_1 = \varphi(x, y, a)$$

a étant un paramètre pouvant prendre une infinité de valeurs ; elles définiront, pour chaque valeur de a, une transformations permettant de passer d'un point M (x, y) du plan à un autre point M_1 $(x_1 y_1)$. Effectuons sur $x_1 y_1$ la même opération avec une valeur b, du paramètre, nous aurons un nouveau point M_2

$$(2) \qquad x_2 = f(x, y, b) \qquad y_2 = \varphi(x, y, b) .$$

Cette double opération qui a permis de passer de x, y à $x_2\ y_2$ peut être considérée comme une transformation unique qu'on appelle produit des deux transformations (a), (b).

Ceci posé on dit qu'un ensemble d'opérations, définies d'une manière quelconque, forme un groupe, lorsque le produit de deux opérations quelconques de l'ensemble est aussi une opération de cet ensemble. En particulier nos transformations à un paramètre formeront un groupe si, quelles que soient les valeurs a, b, il existe une troisième valeur c du paramètre, telle qu'on ait :

$$(3) \qquad x_2 = f(x, y, c) \qquad y_2 = \varphi(x, y, c) .$$

Il est clair que c devra être une fonction de a et de b.
L'intégration d'une équation différentielle du 1er ordre,

revient à la détermination d'un groupe de transformations à un paramètre. Une pareille équation

$$(4) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

peut s'écrire en effet :

$$(5) \qquad \frac{dx}{\xi(x,y)} \quad \frac{dy}{\eta(x,y)} = dt,$$

t étant une variable auxiliaire. D'après le théorème de Cauchy il existe un système d'intégrales x, y se réduisant à $x_0\,y_0$ pour $t=0$. Si on intègre d'abord la première on aura une première équation

$$F(x,y) = F(x_0 y_0).$$

On obtiendra alors t par une quadrature, ce qui fournira la seconde intégrale

$$\Phi(x,y) = \Phi(x_0 y_0) + t.$$

Comme $x_0\,y_0$ sont des valeurs quelconques, les deux équations précédentes permettent de transformer un système de valeurs de x, y en un autre ; elles définiront donc un ensemble de transformations à un paramètre ; écrivons les sous la forme :

$$(6) \qquad F(x_1 y_1) = F(x y) \quad \Phi(x_1 y_1) = \Phi(x,y) + t.$$

Je dis que les transformations définies par les équations (6) forment un groupe ; si on donne en effet à t, les valeurs t, t_1 on aura :

$$F(x_2 y_2) = F(x_1 y_1) = F(x,y); \qquad \Phi(x_2 y_2) = \Phi(x_1 y_1) + t_1 = \Phi(x,y) + t + t_1$$

D'où l'on conclut :

$$F(x_2 y_2) = F(x,y) \quad \Phi(x_2 y_2) = \Phi(x,y) + t_2.$$

avec la relation $t_2 = t + t_1$.

Pour $t=0$ on a $x_1 = x$, $y_1 = y$; on exprime ce fait en disant que le groupe admet la transformation identique. On voit aussi que, si on change t en $-t$, on passe du point M_1 au point M ; en d'autres termes, la transformation inverse de toute transformation du groupe appartient elle-même au groupe ; mais cette seconde propriété est une conséquence de la précédente. Nous allons démontrer en effet que : Tout groupe à un paramètre, qui admet la substitution identique,

peut être obtenu par l'intégration d'un système analogue au système (5) et par suite ramené à la forme (6).

Rappelons en effet les relations (1), (2), (3) nous en déduisons :

$$f(x,y_1,b) = f(x,y,c) \quad \varphi(x,y_1 b) = \varphi(x,y,c) \quad b = \psi'(a,c)$$

a, b, c étant liées par une relation constante ; nous considérons x, y comme constants ; x, y, sont alors des fonctions de a, définies par les équations mêmes du groupe ; quant aux relations précédentes, elles contiennent deux variables indépendantes a, c, si nous considérons b comme une fonction connue de a et de c ; différentions ces deux relations par rapport à a, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{da} = -\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a} \qquad \frac{d\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{da} = -\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a}$$

f et φ étant des fonctions de x, y_1, b ; on tire de là pour $\frac{dy_1}{da}$ $\frac{dx_1}{da}$ des valeurs de la forme :

$$\frac{dx_1}{da} = \frac{\partial \psi}{\partial a}\mathcal{F}(x,y,b) \qquad \frac{dy_1}{da} = \frac{\partial \psi}{\partial a}\mathcal{G}(x_1 y_1 b)$$

Les premiers membres étant indépendants de b il en est de même des seconds ; nous ne changerons rien en attribuant à b une valeur particulière b_0 ; remplaçons donc b par b_0 et c par sa valeur tirée de $b_0 = \psi(a,c)$ nous aurons en définitive deux équations de la forme :

$$\frac{dx_1}{da} = \lambda(a)\xi(x,y_1) \quad \frac{dy_1}{da} = \lambda(a)\eta(x,y_1)$$

Soit maintenant a_0 la valeur du paramètre qui correspond à la substitution identique

$$x = f(x,y,a_0) \quad y = \varphi(x,y,a_0) .$$

Si nous posons

$$t = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\,da \quad \lambda(a)\,da = dt$$

nous aurons à intégrer le système :

$$\frac{dx_1}{\xi(x,y_1)} = \frac{dy_1}{\eta_1(x,y_1)} = dt$$

avec la condition que x, y_1 se réduisent à x, y respectivement, pour $t = 0$.

Le théorème est donc démontré, et on voit comment les fonctions ξ, η peuvent se déduire des équations mêmes qui définissent le groupe.

Quand on se donne le groupe les fonctions ξ, η ne sont déterminées qu'à un facteur constant près ; si on prend en effet Kt pour paramètre au lieu de t, ξ, η sont divisées par K ; au contraire à une équation différentielle donnée, c'est à dire à un système de valeurs de ξ, η correspond un système d'intégrales, et par suite un groupe unique et parfaitement déterminé.

IV_ Développement des formules de Transformation suivant les puissances de t. _ Partons du système :

$$(7) \qquad dx_1 = \xi(x_1 y_1)\, dt \quad dy_1 = \eta(x_1 y_1) dt$$

qui, ainsi que nous l'avons vu, définit le groupe sans ambiguité ; x, y, peuvent être développés suivant deux séries entières :

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1 &= x + t \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)_0 + \cdots \\ y_1 &= y + t \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)_0 + \cdots \end{aligned}$$

Nous transformerons ces développements à l'aide des équations (7). _ Désignons en général par $A(H)$, le résultat obtenu en effectuant sur la fonction $H(x, y)$ l'opération :

$$\xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y}$$

Continuons en outre à remplacer $H(x, y_1)$ par H_1. On aura :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2}\xi_1 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2}\eta_1$$

d'où :

$$\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)_0 = \xi \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = A(\xi)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\xi_1 + \frac{\partial^2\eta_1}{\partial^2 y_1^2}\eta_1 \qquad \left(\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)_0 = \xi\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = A(\eta)$$

Les coefficients de $\frac{t^2}{2}$ dans les formules (8) sont donc $A(\xi), A(\eta)$;

les autres coefficients s'en déduisent bien aisément. On a en effe quelle que soit la fonction F:

$$\frac{d}{dt} F(x,y) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = A(F)$$

On on déduit en différentiant $(p-1)$ fois par rapport à t et e représentant d'autre part, par $A^{(p)}$ le résultat obtenu en répétant p fois suite l'opération (A),

$$\frac{d^p F}{dt^p} = A^p(F) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^p F_1}{dt^p}\right)_0 = A^p(F).$$

On en conclut pour les formules (8)

$$x_1 = x + \frac{t}{1}\cdot\xi + \frac{t^2}{1.2} A(\xi) + \frac{t^3}{1.2.3} A^2(\xi) + \dots$$

$$y_1 = y + \frac{t}{1}\cdot\eta + \frac{t^2}{1.2} A(y) + \frac{t^3}{1.2.3} A^2(\eta) + \dots$$

Elles peuvent être mises sous une forme plus symétrique e remarquant que, par définition, on a $\xi = A(x)$, $y = A(y)$. On a al les formules définitives :

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} A(x) + \frac{t^2}{1.2} A^2(x) + \dots \\ y_1 = y + \frac{t}{1} A(y) + \frac{t^2}{1.2} A^2(y) + \dots \end{cases}$$

Plus généralement on peut développer une fonction quelconq des intégrales x_1, y_1 ; on a la formule suivante, qui est intuitive qua on considère les formules (9) et qu'on vérifie sans aucune difficult

$$(10) \qquad F_1 = F + \frac{t}{1}\cdot A(F) + \frac{t^2}{1.2} A^2(F) + \frac{t^3}{1.2.3} A^3(F) + \dots$$

V _ Invariants d'un groupe de transformations _ Faisceau invariants —— On donne le nom d'invariant à toute fonction $H(x,$ qui se reproduit par toutes les transformations du groupe, il est très de former tous les invariants.

Nous en connaissons déjà un ; car si nous supposons les équations du groupe mises sous la forme canonique :

$$\varphi_1 = \varphi \qquad \psi_1 = \psi + t$$

il est évident que φ est un invariant ; plus généralement, tou

fonction $\lambda(\varphi)$ sera invariante, puisque l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}$$

est $\lambda(\varphi)$ = constante, et que par suite l'une des équations du groupe est

$$\lambda\left[\varphi(xy)\right] = \lambda\left[\varphi(x,y)\right]$$

Réciproquement tout invariant est de la forme $\lambda(\varphi)$. – En effet si dans la formule (10) nous faisons $F_1 = F$ et que nous supposions cette relation vérifiée quelque soit t, nous devons avoir :

$$A(F) = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Comme on a d'ailleurs

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

on en conclut que F et φ sont fonctions l'une de l'autre, leur déterminant fonctionnel étant nul.

D'après cela on peut dire que le groupe n'admet qu'un seul invariant et qu'on obtient cet invariant en résolvant, par rapport à la constante, l'intégrale générale de l'équation :

$$\eta\, dx - \xi\, dy = 0 .$$

Supposons maintenant que l'on considère une famille de courbes dépendant d'un paramètre

$$H(x, y, a) = 0 .$$

Nous dirons qu'elles forment un faisceau invariant du groupe (ξ, η) si une transformation quelconque de ce groupe transforme chaque courbe du faisceau en un autre appartenant également au faisceau. En éliminant a entre les deux équations :

$$H = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = 0$$

on aura une équation différentielle du premier ordre :

$$M\,dx + M'\,dy = 0\ ;$$

c'est l'équation différentielle du faisceau. Soit u = const. son intégrale générale. Si on transforme la fonction u par la formule (10) on a :

$$u_1 - u = t\,A(u) + \frac{t^2}{1\cdot 2} A^2(u) + \text{———}$$

à tout système de valeurs de $x\,y$ qui laissent u constant correspondent des valeurs de $x_1\,y_1$ pour lesquelles u_1 reste lui même constant u_1 doit donc être une fonction de u ; par suite $u_1 - u$ doit aussi être une fonction de u quelque soit t ; cela exige évidemment que l'on ait :

$$A(u) = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} = f(u).$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante ; car si on la suppose remplie on aura :

$$A^2(u) = f'(u)\,A(u) = f(u)\,f'(u)\ ;$$

donc le coefficient de t^2, et de même les suivants, seront des fonctions de u.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle $M\,dx + N\,dy = 0$ définisse un faisceau invariant du groupe (ξ, η) c'est qu'on ait :

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} = f(u)\ ,$$

f étant une fonction quelconque.

Cette condition peut être d'ailleurs mise sous une autre forme. Puisque u = const. est l'intégrale générale de l'équation ;

$$M\,dx + N\,dy = 0\,,$$

on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda M \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda N$$

λ étant un facteur d'intégrabilité. La condition trouvée peut donc s'écrire:

$$\lambda(M\xi + \eta N) = f(u),$$

ou

$$\frac{1}{M\xi + N\eta} = \frac{\lambda}{f(u)}$$

Mais le second membre est, d'après ce que nous avons vu, l'expression générale des facteurs intégrants; donc

Pour que le groupe (ξ, η) transforme en lui-même le faisceau défini par l'équation différentielle:

$$M dx + N dy = 0$$

il faut et il suffit que $\frac{1}{M\xi + N\eta}$ soit un facteur intégrant de cette équation.

On voit donc que la recherche du facteur intégrant revient à celle d'un groupe pour lequel le faisceau intégral soit un invariant. Il est quelquefois aisé de trouver un pareil groupe par des considérations géométriques, et l'intégration de l'équation différentielle s'en déduit alors sans difficulté.

VI. Exemples — 1°. Les formules:

$$(11) \qquad x_1 = ax \qquad y_1 = ay$$

déterminent un groupe, le groupe homothétique; si on pose

$$x_2 = bx_1 \qquad y_2 = by_1$$

on en déduit en effet:

$$x_2 = cx \qquad y_2 = cx \qquad c = ab.$$

De plus il admet la transformation identique pour $a = 1$; si on pose $a = 1+t$ on aura:

$$x_1 = x + tx \quad y_1 = y + ty \quad \xi = x \quad \eta = y.$$

En intégrant les équations:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = dt$$

on obtient immédiatement la forme canonique :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x} \qquad - \operatorname{Log} x_1 = \operatorname{Log} x + t \,.$$

Observons maintenant que si on transforme une courbe, le rapport $\frac{dy}{dx}$ reste invariable ; donc le groupe admet comme invariant tout faisceau de courbes définies par une relation constante entre $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{y}{x}$; en d'autres termes par une équation différentielle telle que

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) ;$$

c'est sous une forme particulière, l'équation homogène la plus générale. Donc, si on considère l'équation homogène :

$$M\,dx + N\,dy = 0 \,,$$

elle admet les transformations du groupe homothétique et $\frac{1}{Mx+Ny}$ est un facteur intégrant.

Considérons, comme second exemple, les formules :

$$(12) \qquad x_1 = x\cos t + y\sin t \qquad y_1 = x\sin t - y\cos t \,.$$

Elles forment un groupe de rotations autour de l'origine ; si on remplace t par t_1 on a :

$$x_2 = x_1\cos t_1 + y_1\sin t_1 = x\cos(t - t_1) + y\sin(t - t_1) = x\cos t_2 + y\sin t_2 \,.$$

$$y_2 = x\sin t_2 - y\cos t_2 \qquad\qquad (t_2 = t - t_1) \,.$$

La substitution identique correspond ici à $t = 0$. Si nous développons x, y, suivant les puissances de t nous aurons :

$$\frac{dx_1}{dt} = -y_1 \qquad \frac{dy_1}{dt} = x_1 \,,$$

d'où en faisant $t=0$, $\xi=-y$ $\eta=x$

On mettra bien aisément les équations du groupe sous la forme canonique :

$$x_1^2+y_1^2=x^2+y^2 \quad \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+t.$$

D'après cela toute équation différentielle admettant les transformations du groupe s'intégrera par une quadrature si on prend x^2+y^2 comme variable et $\operatorname{arc} tg \frac{y}{x}$ comme fonction. On pourra d'ailleurs intégrer en remarquant que si $M\,dx+N\,dy=0$ est cette équation, la fonction :

$$\frac{1}{My-Nx}$$

sera un facteur d'intégrabilité.

Il est évident que l'on sera dans le cas que nous venons d'indiquer toutes les fois qu'on cherchera à déterminer, d'après une propriété différentielle, une famille de lignes tracées sur une surface de révolution et plus généralement sur un hélicoïde (Picard, cours autographié, page 318), pourvu que la propriété en question soit indépendante de l'azimut ; on intégrera par des quadratures l'équation différentielle qui traduit cette propriété en projection sur le plan des $x\,y$ (lignes asymptotiques, lignes de courbure, etc.)

VII – Transformation infinitésimale

— Effectuons sur les différents points du plan la transformation :

$$x_1=x+\varepsilon\xi \quad y_1=y+\varepsilon\eta$$

dans laquelle nous supposons ε infiniment petit nous aurons ainsi ce qu'on appelle une transformation infinitésimale ; un système de fonctions données $\xi(x\,y)$, $\eta(x,y)$ peut être considéré comme définissant soit un groupe (ξ,η) soit une transformation infinitésimale unique ; la transformation infinitésimale étant connue, le groupe sera complètement déterminé ; la réciproque ne serait pas exacte.

En cherchant les invariants et les faisceaux invariants du groupe (ξ,η) nous avons constaté que la condition d'invariance une fois exprimée à l'aide du premier terme dans le développement des formules (9) et (10) se trouvaient d'elles-mêmes vérifiées par toute

la suite des coefficients. Il résulte de là qu'au point de vue des invariants il est indifférent de considérer ou le groupe (ξ, η) dans son ensemble, ou la transformation infinitésimale et il pourra être plus commode d'envisager cette transformation unique et c'est ce qu'on fait en général. On prendra par exemple la transformation :

$$y_1 = y(1+\varepsilon) \qquad x_1 + x(1+\varepsilon),$$

au lieu du groupe homothétique que nous avons considéré ; de même au groupe des rotations effectuées autour de l'origine, on substituera la rotation infinitésimale :

$$x_1 = x - \varepsilon y \qquad y_1 = y + \varepsilon x$$

Huitième Leçon.

Généralités sur les systèmes d'équations différentielles.

I. Réduction à un système du 1er ordre. — Nous nous occuperons maintenant des systèmes d'équations différentielles d'ordre quelconque. Supposons qu'on ait un système de n équations contenant une variable indépendante z et n fonctions $u, v, w, \ldots$ de cette variable, et les dérivées des différents ordres de u, v, w ; on peut immédiatement ramener un pareil système à un autre qui ne contienne que des dérivées du premier ordre, à la condition d'introduire de nouvelles fonctions inconnues.

Supposons, pour fixer les idées que n soit égal à (3) et soit

$$f\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, v, \frac{dv}{dz}, \frac{d^2v}{dz^2}, \frac{d^3v}{dz^3}, w, \frac{dw}{dz}, \frac{d^2w}{dz^2}, \frac{d^3w}{dz^3}, \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

$$(1) \qquad \varphi\left(z, u, \frac{du}{dz}, \ldots v, \frac{dv}{dz} \ldots\ldots \frac{d^3v}{dz^3}, w \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

$$\psi\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2} \ldots\ldots \frac{d^3v}{dz^3}, w \ldots\ldots\ldots \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

le système proposé ; il est évident qu'on peut le remplacer par le suivant :

$$\frac{du}{dz} = u' \quad \frac{dv}{dz} = v' \quad \frac{dv'}{dz} = v'' \qquad f\left(z, u, u' \frac{du'}{dz}, v, v', v'' \frac{dv''}{dz}, w, w', w'', w''' \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

(2)
$$\frac{dw}{dz} = w' \quad \frac{dw'}{dz} = w'' \quad \frac{dw''}{dz} = w''' \qquad \varphi\left(z, u, u' \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

$$\psi\left(z, u, u' \frac{du'}{dz}, \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

Si les équations (1) sont résolubles par rapport à $\frac{du^2}{dz^2}$ $\frac{d^3v}{dz^3}$ $\frac{d^4w}{dz^4}$ c'est à dire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé, les trois dernières équations du système (2) seront résolubles par rapport à $\frac{du'}{dz}$ $\frac{dv''}{dz}$ $\frac{dw'''}{dz}$, et on aura un système du premier ordre, résolu par rapport aux dérivées des neuf fonctions inconnues :

$$u, v, w, u', v' \ldots w'''.$$

On peut dès lors appliquer à ce système le théorème général de Cauchy ; l'intégrale générale contiendra 9 constantes arbitraires permettant d'attribuer pour $z = a$, des valeurs arbitraires aux trois fonctions u, v, w et à leurs dérivées jusqu'à celles de l'ordre le plus élevé exclusivement ; il faudra d'ailleurs pour que la théorie soit applicable, qu'on puisse tirer des équations (1) trois valeurs de $\frac{d^2u}{dz^2}$ $\frac{d^3v}{dz^3}$ $\frac{d^4w}{dz^4}$ holomorphes pour le système de valeurs initiales considéré.

Remarques : Nous avons supposé les équations (1) résolubles par rapport aux plus hautes dérivées des fonctions inconnues ; s'il en était autrement, on pourrait éliminer ces dérivées et substituer à l'une des équations (1) une équation dans laquelle n'entreraient que les dérivées d'ordre inférieur ; on pourra ensuite en dérivant cette dernière équation s'en servir pour faire disparaître dans les deux autres l'une des dérivées de l'ordre le plus élevé par exemple $\frac{d^4w}{dz^4}$; on sera ramené ainsi à un système de trois équations nouvelles, dont l'ordre aura diminué d'une unité pour l'une des fonctions inconnues.

2°_ Nous avons supposé le nombre p des équations égal au nombre n des fonctions inconnues ; si l'on avait $p < n$, on pourrait se donner arbitrairement $n-p$ des fonctions inconnues et on serait ramené à un système d'équations analogues au système (1) ; le système proposé serait donc indéterminé ; si au contraire on avait

$p > n$; en laissant de côté $n-p$ équations on aurait un système de p équations à p fonctions inconnues dont l'intégrale serait déterminée; ces intégrales ne vérifieraient pas, en général, les $n-p$ équations complémentaires ; donc les équations données seraient, en général incompatibles.

II – Réduction à une équation différentielle unique.

La réduction précédente porte sur l'ordre des équations qu'on abaisse au premier, à la condition d'augmenter le nombre des équations et des fonctions inconnues. On peut, au contraire, ramener le problème à l'intégration d'une seule équation différentielle, d'ordre plus élevé, et ne contenant plus qu'une fonction inconnue.

Prenons par exemple deux équations :

$$(3) \quad \begin{cases} f\left(z, u, v, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{d^2u}{dz^2}, \dfrac{dv}{dz}, \dfrac{d^2v}{dz^2}, \dfrac{d^3v}{dz^3}\right) = 0 \\ \varphi\left(z, u, v, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{d^2u}{dz^2} \cdots\cdots \dfrac{d^3v}{dz^3}\right) = 0 \end{cases}$$

Pour $z = a$ on devra avoir :

$$u = b \qquad v = c \qquad \frac{du}{dz} = b' \qquad \frac{dv}{dz} = c' \qquad \frac{d^2v}{dz^2} = c''$$

Ces conditions entraînent à cause des équations (3) la connaissance de toutes les dérivées d'ordre supérieur, pour $z = a$; on aura par exemple :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = b'' \qquad \frac{d^3u}{dz^3} = b''' \quad \cdots\cdots \quad \frac{d^3v}{dz^3} = c''' \quad \cdots\cdots \quad \frac{d^4v}{dz^4} = c'''' \cdots\cdots$$

Ceci posé, si nous dérivons deux fois de suite chacune des équations (3) nous aurons en tout six équations contenant comme plus hautes dérivées $\frac{d^4u}{dz^4}$, $\frac{d^5v}{dz^5}$; entre ces 6 équations éliminons u et ses 4 dérivées, nous aurons en définitive une équation de la forme

$$(4) \qquad F\left(z, v, \frac{dv}{dz}, \frac{d^2v}{dz^2}, \frac{d^3v}{dz^3}, \frac{d^4v}{dz^4}, \frac{d^5v}{dz^5}\right) = 0$$

On voit sans difficulté que si les équations (3) sont résolues par rapport à $\frac{d^3v}{dz^3}, \frac{d^2v}{dz^2}$, l'équation (4) sera elle-même résoluble par rapport à $\frac{d^5v}{dz^5}$; on pourra donc l'intégrer; elle admettra donc une solution déterminée et telle que l'on ait pour $z=a$

$$v=c \qquad \frac{dv}{dz}=c' \qquad \frac{d^2v}{dz^2}=c'' \qquad \frac{d^3v}{dz^3}=c''' \qquad \frac{d^4v}{dz^4}=c^{IV}.$$

En portant la valeur de v dans les six équations précédentes, elles se réduiront à cinq, permettant d'obtenir, sans intégration u, et ses quatre premières dérivées. –

III – Réduction à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

Supposons qu'on ait réduit le système donné à un système du premier ordre; désignons par x la variable indépendante, par $x_1\ x_2\ x_3 \dots x_n$ les fonctions inconnues, nous pourrons mettre les équations obtenues sous la forme :

$$(5) \qquad \frac{dx}{\xi(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \frac{dx_1}{\xi_1(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n(x, x_1 x_2 \cdots x_n)}$$

la variable indépendante n'étant plus spécifiée. – Les propositions démontrées dans le cas de deux variables se généralisent sans difficulté.

Considérons d'abord l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(6) \qquad \xi \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \cdots + \xi \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} = 0.$$

Supposons qu'on ait intégré les équations (1) et résolu les intégrales par rapport aux constantes, de sorte qu'elles soient sous la forme :

$$(7) \qquad F_1(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = c_1 \qquad F_2(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = c_2 \qquad F_n(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = c_n.$$

Si on les différentie totalement et qu'on y remplace dx_i par ξ_i on exprimera que ce sont les intégrales du système (5). On obtient ainsi n identités :

$$\xi \frac{\partial F_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

Donc chacune des fonctions F vérifie l'équation (6). – Plus généralement toute fonction $\varphi(F_1 F_2 \dots F_n)$ vérifiera l'équation (6) car en la substituant dans (6) on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial F_i} \left(\xi \frac{\partial F_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \dots + \xi_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) = 0,$$

identité qui est évidente, chaque parenthèse, séparément, étant nulle. Réciproquement toute solution F de l'équation (6) est une fonction de $F_1 F_2 F_n$; Si en effet on élimine les ξ entre les relations qui expriment que $F, F_1, .. F_n$ sont des intégrales on obtient la relation

$$\frac{D(F, F_1 F_2 \dots F_n)}{D(x, x_1 x_2 \dots x_n)} = 0$$

Elle exprime qu'il existe une identité entre les fonctions $F, F_1 F_2 \dots F_n$ et cette identité doit nécessairement contenir effectivement F, sinon les équations $F_1 = c_1$ $F_2 = c_2 \dots F_n = c_n$, ne représenteraient pas l'intégrale générale du système (5), puisqu'elles ne permettraient pas de disposer des valeurs de $x_1 x_2 \dots x_n$ pour $x = \alpha$. – Donc on aura bien

$$F = \varphi(F_1 F_2 \dots F_n)$$

la fonction φ étant d'ailleurs arbitraire.

Ainsi l'intégration du système (5) entraine celle de l'équation

Réciproquement, supposons qu'on connaisse $\underline{n}$ solutions indépendantes, $\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_n$, de l'équation (6) ; je dis qu'on connaîtra l'intégrale générale du système (5). En effet, désignons par : $a_1 a_2 \dots a_n$ des constantes arbitraires et considérons les équations

$$(7) \qquad \lambda_1 = a_1 \quad \lambda_2 = a_2 \qquad \lambda_n = a_n$$

elles définissent $x_1 x_2 \dots x_n$ comme fonctions de x et les différentielles des fonctions ainsi définies satisfont aux équations :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$

Mais on a en même temps les identités :

$$\xi \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \xi_n \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

Comme le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D\ (\lambda_1\, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n)}{D\ (x_1\, x_2 \quad\quad x_n)} \neq 0$$

on en conclut évidemment :

$$\frac{dx_j}{dx} = \frac{\xi_j}{\xi}$$

Donc les équations (5) sont vérifiées. — Ainsi les équations (7) fournissent une intégrale et c'est l'intégrale générale puisque d'après l'inégalité précédente, elles sont résolubles par rapport à $x_1\, x_2 \cdots x_n$.

En résumé, l'intégration du système (5) et celle de l'équation (6) sont une seule et même question.

IV — Groupes de Transformation à un paramètre —

Nous pouvons généraliser aussi facilement ce que nous avons dit d'une équation à deux variables dans ses rapports avec la théorie des groupes ; il n'y a rien à changer aux démonstrations ; les résultats sont intuitifs et on peut se contenter de les énoncer.

1° Prenons pour fixer les idées, quatre variables, x, y, z, u et considérons le système :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{\xi(x,y,z,u)} = \frac{dy_1}{\eta(x,y,z,u)} = \frac{dz_1}{\zeta(x,y,z,u)} = \frac{du_1}{\theta(x,y,z,u)} .$$

Déterminons de nouvelles variables x_1, y_1, z_1, u_1 définies par les équations :

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{\xi\ (x_1, y_1, z_1, u_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1, z_1, u_1)} = \frac{dz_1}{\zeta(x_1, y_1, z_1, u_1)} = \frac{du_1}{\theta(x_1, y_1, z_1, u_1)} = dt ,$$

et devant se réduire à x, y, z, u, respectivement, pour $t = 0$. Trois des intégrales pourront s'obtenir en laissant de côté la variable t et la 4ème

une fois les autres connues, s'obtiendra par une quadrature. — La solution sera donc de la forme :

$$(10)\quad \begin{cases} f(x_1 y_1 z_1 u_1) = f(xyzu) \quad \varphi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \varphi(xyzu) \quad \psi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \psi(xyz \\ \chi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \chi(xyzu) + t \end{cases}$$

Ces relations définissent un groupe de transformations à un paramètre ; $t = 0$ correspond à la transformation identique ; deux valeurs égales et de signes contraires de t donnent deux transformations inve l'une de l'une de l'autre.

Réciproquement, soit un groupe de transformations donné pa les équations :

$$(11)\quad x_1 = F(x,y,z,u,a) \quad y_1 = \Phi(x,y,z,u,a) \quad z_1\,\Psi(x,y,z,u,a) \quad u_1 = X(x,y,z,u$$

admettant pour $a = a_0$ la transformation identique ; si on raisonne sur les relations :

$$F(x,y,z,u,b) = F(xyzuc \qquad \Phi(x,y,z,ub) = \Phi(x,yzuc) \ldots \qquad c = \theta(a,b$$

comme nous l'avons fait (page 46) dans le cas de deux variables, nou obtiendrons des relations de la forme :

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{dz_1}{\zeta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{du_1}{\theta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = dt \qquad t = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\,da$$

et les fonctions inconnues de t, $x_1 y_1 z_1 u_1$ devront pour $a = a_0$ ou po $t = 0$ se réduire à x, y, z, u respectivement.

2° Les formules de développement suivant les puissances t peuvent être écrites immédiatement ; si nous désignons symbolique par $A(H)$ l'expression :

$$\xi \frac{\partial A}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \cdots + \xi_n \frac{\partial A}{\partial x_n}$$

et par H_1 le résultat obtenu en remplaçant $x\,y\,z\,u$ par x_1, y_1, z_1, u_1

on aura :

$$(11)\quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} A(x) + \frac{t^2}{1,2} A^2(x) + \cdots \\ y_1 = y + \frac{t}{1} A(y) + \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

et en général

$$(12)\qquad H_1 = H + \frac{t}{1} A(H) + \frac{t^2}{1,2} A^2(H) + \cdots$$

La transformation infinitésimale sera ici, en appelant ε un infiniment petit :

$$x_1 = x + \varepsilon\xi \quad y_1 = y + \varepsilon\eta \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta \quad u_1 = u + \varepsilon\theta.$$

3°_ Les invariants du groupe s'obtiennent aussi sans difficulté ; pour qu'une fonction λ se conserve par toutes les transformations du groupe, c'est à dire pour qu'on ait, quelque soit t, $\lambda_1 = \lambda$, il faut et il suffit que $A(\lambda) = 0$. Or on connaît trois invariants distincts, ce sont les fonctions f, φ, ψ, obtenues en mettant les équations du groupe sous forme canonique, et d'après ce que nous avons vu plus haut toutes les autres solutions de l'équation aux dérivées partielles $A(\lambda) = 0$ seront des fonctions de f, φ, ψ.. A ce point de vue on doit considérer le groupe comme admettant trois invariants distincts.

Quant au faisceau formé par les intégrales d'un système différentiel, il n'admet pas en général de transformation infinitésimale ; les groupes de transformation qui correspondraient à une équation d'ordre supérieur ou à un système de plusieurs équations du premier ordre, seraient des groupes à plusieurs paramètres ; nous n'aborderons pas la théorie des groupes de transformation de cette nature.

V_ Cas d'abaissement

1°_ Revenons à un système de n équations du 1er ordre ; soit x la variable, $x_1 x_2 \cdots x_n$ les fonctions inconnues ; le système aura la forme (5) ;

$$(5)\qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

nous avons vu que, si on connaît x solutions indépendantes de l'équation (6) ;

$$\xi \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \xi_n \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} = 0$$

on pouvait en déduire l'intégrale générale du système (5) - Si on connait un nombre moindre p de solutions de l'équation (6) on pourra s'en servir pour diminuer de p unités le nombre des équations (5). - Soient, en effet $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_p$ les solutions connues ; l'intégrale générale du système (5) sera

$$\varphi_1 = C_1 \quad \varphi_2 = C_2 \quad \varphi_3 = C_3 \cdots\cdots \varphi_p = C_p$$

$$\varphi_{p+1} = C_{p+1} \quad \varphi_{p+2} = C_{p+2} \qquad\qquad \varphi_n = C_n$$

les C étant des constantes et les $n-p$ dernières fonctions φ étant inconnues ; servons-nous des p premières pour exprimer $x_1\, x_2 \ldots x_p$ en fonction de $x,\ x_{p+1}\ x_{p+2} \ldots x_n$ et désignons par (ξ_i) ce que devient (ξ_i) quand on y substitue les expressions ainsi trouvées ; on sera ramené évidemment à intégrer le système de $(n-p)$ équations.

$$\frac{dx_{p+1}}{(\xi_{p+1})} = \frac{dx_{p+2}}{(\xi)_{p+2}} = \qquad\qquad = \frac{dx_n}{(\xi_n)} = \frac{dx}{(\xi)}$$

où ne figurent plus que <u>n-p</u> fonctions inconnues.

2°- Si l'une des variables $\underline{x}$ par exemple, ne figure dans les équations que par sa différentielle, on intégrera d'abord le système de $n-1$ équations obtenu en laissant de côté le rapport $\frac{dx}{\xi}$; une fois les intégrales obtenues, on en tirera $x_1\ x_2 - - x_{n-1}$ en fonction de x_n et ξ s'obtiendra par une quadrature :

$$x = \int \frac{(\xi)}{(\xi_n)}\, dx_n$$

Dire que x n'entre dans les équations que par sa différentielle c'est dire que ces équations ne changent pas si on y change x en $x+t$, t étant quelconque ; en d'autres termes elles admettent le groupe de transformations :

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 \qquad\qquad y_n = x_n \quad y = x + t$$

Supposons plus généralement, qu'elles admettent le groupe :

$$y_1 = x_1 + a_1 t \qquad y_2 = x_2 + a_2 t \qquad y_n = x_n + a_n t \qquad y = x + t$$

les a étant des constantes.

Si on prend pour variables nouvelles :

$$\alpha_1 = x_1 - a_1 x \qquad \alpha_2 = x_2 - a_2 x \quad \dots \quad \alpha_n = x_n - a_n x \quad \dots \qquad \alpha = x$$

il est évident que le système admettra, quel que soit t, la transformation

$$\beta_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 \qquad \beta_n = \alpha_n \qquad \beta = \alpha + t$$

On sera donc ramené au cas précédent ; on aura une équation de moins à intégrer, puis une quadrature à effectuer.

Neuvième Leçon.

– Intégration des équations différentielles d'ordre supérieur.

I — Nous avons vu que l'intégrale générale d'une équation d'ordre n,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

doit contenir n constantes arbitraires permettant d'attribuer, pour $x = a$, des valeurs également arbitraires à y et à ses $(n-1)$ premières dérivées. Il existe un certain nombre de cas où cette intégrale peut s'exprimer à l'aide de quadratures.

Soit d'abord une équation de la forme :

$$(1) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f(x).$$

On peut par une quadrature, obtenir $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, puis en déduire par un nouvelle quadrature $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$ et ainsi de suite.— On a ainsi :

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int f(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int dx \int dx \dots \int f(x)\,dx$$

$$y = \int dx \int dx \int dx \dots \int f(x)\,dx$$

le nombre des signes $\int$ surperposés étant $\underline{n}$; chaque quadrature nouvel
introduit une constante arbitraire

On peut encore opérer de la manière suivante : Remarquon
que, quand on connaît une intégrale particulière y_1, il est facile d'ob
nir l'intégrale générale, car posons:

$$y = y_1 + z$$

En différentiant $\underline{n}$ fois, on voit que la fonction z est don
par l'équation:

$$(2) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} = 0$$

On sait qu'alors z se réduit à un polynôme entier P_{n-1} de deg
$n-1$ à coefficients arbitraires :

$$P_{n-1} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{x-1} x^{n-1}.$$

Et par suite, on a pour l'intégrale générale cherchée:

$$y = y_1 + P_{n-1} :$$

Ceci posé, considérons l'intégrale définie :

$$u_p = \frac{1}{1.2\ldots\ldots p} \int_\alpha^x (x-z)^p f(z)\, dz$$

α étant une constante. Nous allons prouver que cette fonction de x
satisfait à l'équation (1). Différentions p fois par rapport à x, nous
aurons successivement:

$$\frac{du_p}{dx} = \frac{1}{1.2\ldots(p-1)} \int_\alpha^x (x-z)^{p-1} f(z)\, dz$$

$$\frac{du_p}{dx} = u_{p-1}$$

$$\frac{d^2u_p}{dx^2} = u_{p-2}$$

. . . .

$$\frac{d^{p-1}u_p}{dx^{p-1}} = u_1$$

$$\frac{d^p u_p}{dx^p} = u_0 = \int_\alpha^x f(z)\, dz$$

$$\frac{d^{p+1}u_p}{dx^{p+1}} = f(x).$$

On retrouve l'équation (1) si on fait $p+1=n$.

Donc, une solution particulière de l'équation (1) est:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_{\alpha}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)\,dz.$$

On n'aura plus qu'à ajouter un polynome de degré $n-1$, à coefficients arbitraires, pour avoir l'intégrale générale.

III_ Supposons que la variable x n'entre pas dans l'équation (A) et posons:

$$\frac{dy}{dx}=p$$

Donc:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy}+p^2\frac{d^2p}{dy^2}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2},\ \text{etc}\ldots$$

L'équation proposée prend alors la forme:

$$F\left(y,p,\frac{dp}{dy},\ldots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0\ .$$

On a de cette façon abaissé l'ordre de l'équation différentielle d'une unité. On arrive au même résultat et par la même substitution quand l'équation ne contient pas la fonction y. Ce résultat est d'accord avec ce que nous avons dit (page 62).

Si l'équation ne contient, outre la variable, que deux dérivées consécutives de la fonction, elle est de la forme.

$$f\left(x,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Posons $$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p\ .$$

L'équation devient: $$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$$

Si on peut intégrer cette équation du premier ordre, p sera donné par une quadrature et il sera facile alors de déterminer y par une équation de la forme (1).

Enfin supposons qu'on ait :

$$f\left(x, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

En posant :
$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=p,$$

on est ramené à intégrer l'équation du second ordre :

$$f\left(x, p, \frac{d^2p}{dx^2}\right)=0 .$$

Remarque — Si x ne figure pas dans cette équation et si l'on peut en tirer $\frac{d^2p}{dx^2}$ en fonction de p, on a :

$$\frac{d^2p}{dx^2}=\varphi(p).$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{dp}{dx}$, il vient :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2\int\varphi(p)\,dp.$$

Une fois connue la dérivée $\frac{dp}{dx}$, on en déduit p par une quadrature.

II — Exemples — 1° — Soit à intégrer l'équation :

$$1+y'^2+xy'y''=ay''\sqrt{1+y'^2}$$

y ne figure ici que par ses dérivées, nous poserons donc :

$$y'=p \quad y''=\frac{dp}{dx}$$

$$1+p^2+xp\frac{dp}{dx}=a\frac{dp}{dx}\sqrt{1+p^2}$$

équation linéaire :

$$\frac{dx}{dp}(1+p^2)+px=a\sqrt{1+p^2}$$

On aperçoit immédiatement le facteur intégrant $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, et on obtient l'intégrale :

$$x\sqrt{1+p^2}=ap+c$$

On en tire :

$$p = \frac{ac+\sqrt{a^2+c^2-x^2}}{x^2-a^2} \qquad y = ac\int\frac{dx}{x^2-a^2}+\int\frac{x\sqrt{a^2+c^2-x^2}\,dx}{x^2-a^2}$$

et enfin :

$$y = C\,\mathrm{Log}\,\frac{ax}{c+\sqrt{a^2+c^2-x^2}}+\sqrt{a^2+c^2-x^2}+C'.$$

2°. — Soit encore l'équation du 3e ordre :

$$(1) \qquad y'y'''+ay''^2+by'^2y''=0$$

y n'y figurant encore que par ses dérivées, prenons pour inconnue y', l'équation (1) devient :

$$(2) \qquad y'\frac{d^2y'}{dx^2}+a\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+by'^2\frac{dy'}{dx}=0$$

x n'y figure que par sa différentielle. Nous poserons donc :

$$(3) \qquad \frac{dy'}{dx}=q \quad y'\frac{dq}{dx}+aq^2+by'^2q=0.$$

Si nous y remplaçons dx par $\frac{dy'}{q}$, il vient :

$$(4) \qquad qy'\frac{dq}{dy'}+aq^2+bqy'^2=0.$$

Laissons de côté la solution $q=0$ qui d'ailleurs convient évidemment à l'équation (2) et donne pour y une fonction linéaire quelconque de x ; il nous reste à intégrer l'équation linéaire :

$$(4') \qquad y'\frac{dq}{dy'}+aq+by'^2=0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$(5) \qquad q=Cy'^{-a}-\frac{b}{a+2}y'^2 \qquad\qquad q=\frac{dy'}{dx}=\frac{y'dy'}{dy}$$

On en conclut.

$$y = \int \frac{dy'}{Cy'^{-(a+1)} - \frac{b}{a+2} y'} = -\frac{1}{b} \operatorname{Log}\left(C - \frac{b}{a+2} y'^{a+2}\right) + C' ,$$

Résolvant par rapport à y' on aura x par un quadrature de la forme.

$$x = \int (m + n e^{by})^{-\frac{1}{a+2}} dy \qquad m, n \text{ étant des constantes.}$$

Remarques — 1°. — Celle solution tombe en défaut si $a = -2$; dans ce cas il faut revenir à l'équation (5'); l'intégration s'achève sans difficulté et fournit pour x une valeur de la forme :

$$x = m \int e^{n e^{-by}} dy .$$

2°. — On peut arriver autrement aux résultats précédents; l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{y'''}{y''} + a \frac{y''}{y'} + b y' = 0 ;$$

elle s'intègre une première fois et donne :

$$y'' y'^{a} = C e^{-by} ,$$

relation équivalente à l'équation (5). L'intégration s'achève comme plus haut.

3°. — Trouver les courbes planes dans lesquelles le rayon de courbure R est proportionnel à une puissance donnée de la normale N.

Supposons $R = KN^n$; si nous comptons la normale positivement dans le sens du rayon de courbure on aura :

$$N = -y\,(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} .$$

Si donc on pose $a = (-1)^n . K$, l'équation sera :

$$(1) \qquad y^n y'' = (1+y'^2) . a^{\frac{3-n}{2}} .$$

Elle ne contient pas y. – Posons $y' = p$ $\quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$.

$$(2) \quad \frac{dy}{y^n} = a\,p\,(1+p^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dp$$

D'où en intégrant et supposant $n-1 \neq 0$:

$$-\frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}} = \frac{a}{n-1}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{c}{n-1}.$$

On en tire, en résolvant par rapport à p :

$$p = \frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a\,y^{n-1}}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'où :

$$x = \int\left[\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a\,y^{n-1}}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

C'est l'équation générale des courbes qui répondent à la question. – Il y a lieu de passer en revue un certain nombre de cas particuliers.

1° — $n = 0$

$$x = \int\frac{(c-y)\,dy}{\sqrt{a^2-c^2-y^2+2cy}} \qquad x - c' = \sqrt{a^2-(c-y)^2}$$

$$(x-c')^2 + (y-c)^2 = a^2.$$

c'est l'équation générale des cercles de rayon a.

2° — $n = -1$

$$x = \int\frac{dy\,\sqrt{c-y^2}}{\sqrt{a-c+y^2}}$$

y est une fonction elliptique de $\underline{x}$. Ces courbes comprennent pour $C = 0$ l'ensemble des cercles $(x-c)^2 + y^2 + a = 0$ qui répondent évidemment à la question.

3°. — $n = 3$

$$x \int \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{(c-a)^2 y^2 - 1}}\, dy$$

$$\frac{(c-a)\,x}{\sqrt{a}} = \int \frac{(c-a)\,y\,dy}{\sqrt{(c-a)y^2-1}} = \sqrt{(c-a)y^2-1} + \frac{c'(c-a)}{\sqrt{a}}$$

$$(c-a)\,y^2 - 1 = \frac{(c-a)^2}{a}(x-c')^2$$

Ce sont des coniques ayant un axe dirigé suivant $0x$. On vérifie sans difficulté que le paramètre p est donné par la relation:

$$p^2 = -\frac{1}{a}.$$

4°. — $n = 2$

$$x = \int \frac{a y\, dy}{\sqrt{(c^2-a^2)y^2 - 2cy + 1}}.$$

Le radical s'annule pour $y = \frac{1}{c+a} = \alpha$ $\qquad y = \frac{1}{c-a} = \beta.$
On a alors:

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - (\alpha+\beta)y + \alpha\beta}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)} + \frac{a(\alpha+\beta)}{2\sqrt{c^2-a^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)}}$$

et enfin :

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \sqrt{(y-\beta)(y-\alpha)} + \frac{a(\alpha+\beta)}{2\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{Log.} \frac{\sqrt{y-\alpha}+\sqrt{y-\beta}}{\sqrt{y-\alpha}-\sqrt{y-\beta}} + c'.$$

Remarque — Dans toutes les questions où le rayon de courbure doit être une fonction donnée de la normale, si on connaît une solution contenant une constante arbitraire, il suffit d'y remplacer x par $x + c$ pour avoir la solution générale, l'introduction de cette constante nouvelle c' ayant seulement pour effet de déplacer la courbe le long de l'axe des x.

Cas où $n=1$ — Si $n=1$, les calculs précédents deviennent illusoires; il faut remonter alors à l'équation (2) qui devient :

$$\frac{dy}{y} = \frac{ap\,dp}{1+p^2}.$$

Intégrons :

$$y = c\,(1+p^2)^{\frac{a}{2}} \qquad p = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx}.$$

$$(3) \qquad x = \int\left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Pour que cette différentielle binôme soit intégrable il faut et il suffit que <u>a</u> soit un nombre entier.. En donnant à <u>a</u> des valeurs simples, on obtient un certain nombre de courbes intéressantes.

1°. — $a=1$. Rayon de courbure égal et de signe contraire à la normale :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}} \qquad x - c' = c \operatorname{Log}\left(\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}\right)$$

On en conclut :

$$\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{\frac{x-c'}{c}} \qquad \frac{y}{c} - \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{-\frac{(x-c')}{c}}$$

et en ajoutant :

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}\right)$$

c'est une chaînette.

2°. — $a=-1$ — Rayon de courbure égal à la normale :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} \qquad x - c' = -\sqrt{c^2 - y^2}$$

$$(x-c')^2 + y^2 = c^2.$$

Ce sont des cercles ayant leurs centres sur ox.

3°. — $a=2$ — Rayon de courbure double de la normale et

de sens contraire.

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{c}-1}} \qquad x - c' = 2\sqrt{c}\sqrt{y-c}$$

$$y - c = \frac{(x-c')^2}{4c}$$

Paraboles dont la normale est limitée à la directrice.
4° $a = -2$ — Rayon de courbure double de la normale:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{c}{y}-1}}$$

Si on pose $y = c\cos^2 t$, l'équation devient:

$$x = \int \frac{-2c\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} = \int -2\cos^2 t\,dt$$

$$x - c' = -c\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

On retrouve les équations qui définissent le cycloïde.

Dixième Leçon.

Equations linéaires sans second membre.

1. On appelle équation linéaire une équation de la forme:

$$(1) \qquad A_0\frac{d^ny}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = A.$$

où les A sont des fonctions de x. Cette équation peut se mettre sous la forme $F(y) = A$, le symbole F indiquant une opération qui est bien définie quand on connait l'ensemble des coefficients $A_0\ A_1 \ldots A_n$. On voit immédiatement que l'expression F présente les propriétés suivantes:

1° — On a, en substituant les fonctions $u, v, u+v$

$$(2) \quad F(u+v) = F(u) + F(v)$$

2° — Si $\underline{a}$ désigne une quantité indépendante de x :

$$(3) \quad F(au) = a\,F(u)$$

3° — Si la fonction $\underline{u}$ dépend à la fois de x et d'un paramètre α on a, pour une dérivée d'ordre quelconque :

$$(4) \quad \frac{\partial^p F(u)}{\partial \alpha^p} = F\left(\frac{\partial^p u}{\partial \alpha^p}\right)$$

Ces propriétés sont évidentes et se généraliseraient sans difficulté.

4° — Si on change la variable indépendante, la forme linéaire se conserve. Soit en effet $x = \varphi(t)$ la formule de transformation ; si on passe d'une dérivée à la suivante on a :

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^py}{dx^p}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^py}{dx^p}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

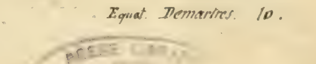
Si donc $\frac{d^py}{dx^p}$ s'exprime linéairement en fonction des dérivées de y par rapport à $\underline{t}$, il en sera de même de $\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}$; or cela a lieu évidemment pour $\frac{dy}{dx}$ et par suite pour une dérivée d'ordre quelconque.

5° — La forme linéaire se conserve également si on change de fonction en posant :

$$y = u\,\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée de $\underline{x}$. Cela résulte évidemment de la formule qui donne les dérivées successives d'un produit de deux fonctions.

6° — Soient deux formes linéaires F, Φ d'ordres $\underline{m}$, $\underline{n}$,



définies, la première par un ensemble de coefficients $A_0 A_1 \dots A_m$, la seconde par des coefficients $B_0 B_1 \dots B_n$; si y est une fonction quelconque de x et qu'on pose:

$$y_1 = F(y) \qquad y_2 = \Phi(y_1) \qquad y_2 = \Phi(y_1)$$

il est clair qu'on pourra poser $y_2 = \Psi(y)$, en désignant par Ψ une troisième forme linéaire définie par un ensemble de coefficients : $C_0 C_1 \dots C_{m+n}$ faciles à exprimer en fonction des coefficients A_i et B_j. En d'autres termes le produit des deux opérations F et Φ est une opération de la même forme ;- si donc on considère le symbole F dans sa généralité, l'ensemble des opérations qu'il représente forme un groupe.

II – Equation sans second membre.

Nous étudierons d'abord le cas où le second membre A est nul. L'équation prend alors la forme $F(y) = 0$; dans ce cas, l'identité (2) donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème. – Si $y_1, y_2, \dots y_p$ sont des solutions particulières de l'équation, on obtient une intégrale contenant p constantes arbitraires en posant:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_p y_p$$

D'après cela, si on connaît n solutions particulières, la combinaison linéaire précédente fournit une solution contenant n constantes arbitraires et on doit supposer qu'on aura ainsi la solution générale de l'équation :

$$F(y) = 0$$

Nous allons chercher à quelles conditions cela aura lieu. Pour que l'équation:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

fournisse l'intégrale générale, on sait qu'on doit pouvoir disposer des constantes C de telle sorte que cette fonction y et ses $n-1$ premières dérivées prennent, pour une valeur quelconque $x = \alpha$, des valeurs choisies arbitrairement $b, b_1, b_2, \dots b_{n-1}$. En d'autres termes on doit pouvoir vérifier pour

$$x = \alpha,$$

les équations suivantes:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = b.$$

$$C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx} = b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \dots\dots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} = b_{n-1}$$

Il faut donc et il suffit que, pour cette valeur de x, qui est une quelconque des valeurs appartenant au domaine dans lequel les intégrales sont définies on ait :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_x \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nous désignerons par $R(x)$ ce déterminant. Si on connaît n intégrales particulières de l'équation $F(y) = 0$ satisfaisant à l'inégalité précédente, on aura l'intégrale générale en posant :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

III_ Propriétés de R (x) — On dit que n fonctions $y_1 y_2 \dots y_x$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe aucun système de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, non toutes nulles, tel que l'on ait identiquement :

$$(1) \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

Théorème — Pour que n fonctions $y_1, y_2 \dots y_n$ ne soient pas linéairement indépendantes ; il faut et il suffit que leur déterminant $R(x)$ soit nul.

D'abord, si ces fonctions ne sont pas linéairement indépendantes il existe un système de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ satisfaisant à l'identité :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

Si nous différentions $n-1$ fois et si nous écrivons que les équation[s] obtenues sont compatibles pour des valeurs des α non toutes nulles, nous obtenons la condition :

$$R(x) = 0$$

Réciproquement, si le déterminant R est nul, il existe un systè[me] de constantes α satisfaisant à l'identité (1). En effet, le déterminan[t] R étant nul il existe entre les éléments d'une même ligne, une même relation linéaire et identique, c'est à dire qu'on a, en désignant pa[r] $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ certaines fonctions de x, non toutes identiquement nulles :

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots\dots + \lambda_n y_n = 0 \\ \lambda_1 \dfrac{dy_1}{dx} + \lambda_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \dots\dots + \lambda_n \dfrac{dy_n}{dx} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \lambda_2 \dfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + \lambda_n \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

Nous allons prouver que ces fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont proportionnelles à des constantes. Différentions les équations (6) ; il vient :

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 \dfrac{d\lambda_1}{dx} + y_2 \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \dots\dots + y_n \dfrac{d\lambda_n}{dx} = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} \cdot \dfrac{d\lambda_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} \cdot \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \dots + \dfrac{dy_n}{dx} \dfrac{d\lambda_n}{dx} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \cdot \dfrac{d\lambda_1}{dx} + \dfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \dots\dots + \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \dfrac{d\lambda_n}{dx} + \Big(\lambda_1 \dfrac{d^n y_1}{dx_n} + \lambda_2 \dfrac{d^n y_2}{dx_n} + \dots\dots + \lambda_n \dfrac{d^n y}{dx} \end{cases}$$

Lemme — La dérivée du déterminant $R(x)$ s'obtient en remplaçant chacun des éléments de la dernière ligne horizontale par sa dérivée.

Le théorème est évident dans le cas où le nombre n des fonctions es[t] égal à l'unité. Il suffit donc de prouver que, s'il est vrai pour n foncti[ons] il l'est pour $n+1$. Soient en effet $y_1\, y_2 \dots y_n$, y_{n+1}, les $n+1$ fonctions considérées, et désignons par $S(x)$ leur déterminant. Si on ordonne $S(x)$ par rapport aux éléments de la dernière ligne, on a en appelant $A_1, A_2 \dots, A_n, A_{n+1}$

les mineurs correspondants :

$$S(x) = A_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + A_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + A_n \frac{d^n y_n}{dx_n} + A_{n+1} \frac{d^n y_{n+1}}{dx^{n+1}}$$

D'où, en différentiant :

$$\frac{dS}{dx} = A_1 \frac{d^{n+1} y_1}{dx^{n+1}} + A_2 \frac{d^{n+1} y_2}{dx^{n+1}} + \ldots + A_n \frac{d^{n+1} y_n}{dx^{n+1}} + A_{n+1} \frac{d^{n+1} y_{n+1}}{dx^{n+1}} +$$

(8)
$$+ A'_1 \cdot \frac{d^n y_1}{dx^n} + A'_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + A'_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + A'_{n+1} \cdot \frac{d y_{n+1}}{dx^{n+1}}$$

La première ligne est le résultat obtenu en remplaçant dans le déterminant S, chaque élément de la dernière ligne par sa dérivée, il suffit donc de prouver que la deuxième ligne est identiquement nulle.

Or, considérons, par exemple, A'_1 : c'est la dérivée d'un mineur de S, c'est à dire d'un déterminant concernant n fonctions ; par suite A'_1 peut s'écrire sous forme d'un déterminant en remplaçant dans ce mineur chaque élément de la dernière ligne par sa dérivée. D'où il résulte que la deuxième ligne de l'égalité (8) s'obtient en remplaçant dans S, sans faire aucun autre changement, les éléments de l'avant dernière ligne par ceux de la dernière ; le déterminant acquiert ainsi deux lignes identiques, donc il est nul.

Revenons aux équations (7). Dans la dernière de ces équations la parenthèse est égale à $R'(x)$. Or si on a $R(x) = 0$, on a aussi $R'(x) = 0$. Dès lors, les équations (7) sont identiques aux équations (6) dans lesquelles les λ seraient remplacés par leurs dérivées λ'. On a donc :

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \varphi(x)$$

φ étant une fonction connue de x. On en conclut en intégrant :

$$\lambda_i = C_i e^{\varphi(x)}$$

C_i étant une constante ; d'ailleurs la fonction $\varphi(x)$ est la même pour tous les λ.

Si on revient à la première des équations (6) et qu'on divise son premier membre par $e^{\varphi(x)}$ on a immédiatement.

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0,$$ ce qu'il fallait prouver.

Si maintenant on rapproche les résultats qui précèdent de ceux déjà obtenus, on arrive à la conclusion suivante:

Pour que n intégrales particulières de l'équation $F(y)=0$ fournissent, par une combinaison linéaire à coefficients arbitraires, l'intégrale générale, il faut et il suffit que ces fonctions soient linéairement indépendantes.

IV — Points critiques des intégrales — Si on se reporte au théorème de Cauchy après avoir transformé l'équation en un système du 1er ordre, on voit immédiatement que les seconds membres des équations de ce système seront holomorphes tant que la variable x restera dans une portion fermée du plan ne contenant aucun point singulier de l'une des fonctions $\frac{A_0}{A_0}, \frac{A_1}{A_0} \dots \frac{A_n}{A_0}$. Il suit de là que les intégrales n'ont que des points critiques fixes, qui sont les points singuliers en question. D'autre part nous savons, par ce qui précède, comment les constantes arbitraires figurent dans l'intégrale générale. Il est alors facile de voir comment les intégrales se comportent dans les environs d'un point singulier.

Supposons que les coefficients A soient uniformes et n'aient que des points singuliers isolés. Soit $\underline{a}$ l'un d'eux; partons d'une valeur quelconque de $\underline{x}$ et revenons à cette valeur après avoir entouré le seul point singulier $\underline{a}$; chacun des coefficients A_i étant uniforme se reproduira finalement avec sa valeur initiale; si on considère un système d'intégrales indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_n$, ces fonctions prendront des valeurs successives qui vérifieront constamment l'équation donnée comme celle-ci aura finalement repris sa forme première, les valeurs finales $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ seront des intégrales de l'équation primitive; ce seront donc des fonctions linéaires, à coefficients constants, de:

$$y_1, y_2 \dots y_n ;$$

On aura donc:

$$Y_1 = C_1^1 y_1 + C_1^2 y_2 \dots + C_1^n y_n$$

$$Y_2 = C_2^1 y_1 + C_2^2 y_2 \dots + C_2^n y_n \quad ,$$

$$\vdots$$

$$Y_n = C_n^1 y_1 + C_n^2 y_2 + \dots + C_n^n y_n$$

Les coefficients C étant déterminés pour chaque point singulier ($\underline{a}$).

Ainsi lorsqu'on tourne autour d'un point critique les fonctions $y_1\,y_2 \dots y_n$ subissent une substitution linéaire ; ce genre de singularité est analogue à ce qu'on rencontre dans l'étude de la fonction algébrique.

La réciproque est vraie : Si n fonctions $y_1\,y_2 \dots y_n$, linéairement indépendantes, n'ont d'autres singularités que des points analogues à ceux que nous venons de définir, c'est à dire tels qu'une rotation autour de l'un d'eux ait pour effet de faire subir à ces fonctions une substitution linéaire, ces fonctions sont les intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes.

Cherchons en effet à déterminer les coefficients $A_0\,A_1 \dots A_n$ de telle sorte que l'équation admette chacune des solutions $y = y_1$, $y = y_2$, ... $y = y_n$. Si nous désignons toujours par R le déterminant :

$$R(x) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & & \frac{dy_n}{dx} \\ & & & \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

et par R_i ce qu'il devient quand on y remplace les dérivées d'ordre $n-i$ par celles d'ordre n, on a :

$$\frac{A_i}{A_0} = \frac{R_i(x)}{R(x)}$$

Il reste seulement à prouver que la fonction $\frac{R_i}{R}$ est uniforme. Or elle ne peut avoir que deux sortes de points singuliers ; d'abord les points singuliers de $y_1\,y_2 \dots y_n$; or si on contourne l'un deux et qu'on désigne par C_i^j l'ensemble des coefficients de la substitution linéaire correspondante, les déterminants R, R_i se reproduisent l'un et l'autre, après un tour, multipliés par le déterminant de ces coefficients ; leur rapport reste donc uniforme dans les environs du point considéré.

Restent les zéros de $R(x)$; soit α l'un d'eux ; ce point étant régulier pour les fonctions $y_1\,y_2 \dots y_n$, l'est également pour R et pour R_i ; ce ne peut donc être qu'un pôle ou un point ordinaire pour

le rapport $\frac{R_1(x)}{R(x)}$; donc ce rapport sera encore uniforme dans les environs du point (α); le théorème est donc démontré.

Remarque — Pour chaque point singulier il existe un système d'intégrales indépendantes pour lequel la substitution linéaire a une forme particulièrement simple ; pour ce qui concerne la recherche de ces systèmes fondamentaux, et l'expression analytique des intégrales correspondantes nous renverrons au mémoire de Mr. Tannery sur les équations différentielles linéaires (Annales de l'Ecole normale 1874). Nous nous contenterons de considérer quelques cas très simples où l'équation s'intègre à l'aide de fonctions connues.

Onzième Leçon

Equations linéaires sans second membre à coefficients constants.

I — L'intégration de l'équation linéaire sans second membre se ramène à une question d'algèbre quand les coefficients sont des constantes. Soit :

$$(1) \qquad F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

l'équation donnée, $a_1 a_2 \ldots a_n$ étant des constantes. Si on y fait $y = e^{rx}$, r étant aussi une constante, on a :

$$F(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} \ldots + a_{n-1} r + a_n)$$

Nous désignerons par $f(r)$ le polynôme entre parenthèses ; il est clair qu'on aura une solution de l'équation (1) si on prend pour r une racine de l'équation caractéristique :

$$(2) \qquad f(r) = 0.$$

Ceci posé, il pourra se présenter deux cas :

1° — L'équation caractéristique n'a que des racines simples. Si $r_1 r_2 \ldots r_n$

sont les racines, chacune fournira une solution; on aura donc un système d'intégrales :

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}, \qquad y_3 = e^{r_3 x}, \qquad \qquad y_n = e^{r_n x}$$

Elles sont d'ailleurs linéairement indépendantes car leur déterminant est :

$$R(x) = e^{(r_1 + r_2 \cdots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & & & r_n^2 \\ & & & & \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & & & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde qui, dans le cas actuel est différent de zéro.

2°.– L'équation caractéristique a des racines multiples – Si p est un entier quelconque, on a :

$$\frac{\partial^p e^{rx}}{\partial r^p} = x^p e^{rx}$$

Donc, d'après une remarque faite au début de la dernière leçon :

$$F(x^p e^{rx}) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} F(e^{rx}) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} \left[x^{rx} f(r) \right]$$

ou, en développant :

$$F(x^p x^{rx}) = e^{rx} \left[x^p f(r) + \frac{p}{1} x^{p-1} f'(r) + \cdots + f^{(p)}(r) \right]$$

Si donc on prend pour r une racine d'ordre α de multiplicité, tous les termes de la parenthèse s'annuleront pourvu que p soit l'un des nombres $0, 1, 2 \ldots (\alpha - 1)$; la racine en question fournira donc α intégrales distinctes :

$$y_1 = e^{rx} \qquad y_2 = x e^{rx} \qquad y_3 = x^2 e^{rx} \qquad y_\alpha = x^{\alpha - 1} e^{rx}$$

Soient alors $r_1\, r_2 \ldots r_q$ les racines de $f(r) = 0$, $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_q$ leurs ordres de multiplicité ; on aura une intégrale en posant :

$$(3) \qquad y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} \qquad + P_q e^{r_q x}$$

P_i étant un polynôme de degré $\alpha_i - 1$ à coefficients arbitraires; ces polynômes se réduisent à des constantes dans le cas où les racines sont simples ; on a alors l'intégrale générale :

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \qquad + C_n e^{r_n x}$$

Il resterait à établir que, dans le cas des racines multiples, l'expression (3) donne encore l'intégrale générale, ou en d'autres termes, que les solutions obtenues en annulant tous les coefficients, sauf un seul, sont linéairement indépendantes. Nous donnerons cette démonstration dans le § suivant.

II_Deuxième méthode

On peut sans changer la forme linéaire, faire la substitution : $y = z.e^{rx}$, r étant une constante et z une fonction de x. On a successivement :

$$\frac{dy}{dx} = r.ze^{rx} + e^{rx}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r^2 z e^{rx} + 2re^{rx}\frac{dz}{dx} + e^{rx}\frac{d^2z}{dx^2},$$

D'où l'on déduit :

$$(3) \qquad F(z.e^{rx}) = e^{rx}\left[zf(r) + \frac{dz}{dx}f'(r) + \frac{1}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}.f''(r) + \dots + \frac{1}{1.2\dots n}\frac{d^nz}{dx^n}.f^n(r)\right]$$

Pour annuler la parenthèse, on peut disposer à la fois de r et de z. Supposons que l'on prenne pour r, une racine r_1 de l'équation caractéristique, d'ordre q de multiplicité ; $f(r_1)$ et ses $q-1$ premières dérivées s'annuleront ; par conséquent, les q premiers termes de la parenthèse (3) disparaîtront. Si maintenant, on prend pour z un polynôme entier à coefficients arbitraires, de degré $q-1$, toutes ses dérivées d'ordre supérieur à q s'annuleront ; donc l'équation sera satisfaite.

Ainsi, une racine r_1 d'ordre q de multiplicité fournit encore une solution à q constantes arbitraires qui est :

$$y = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{q-1} x^{q-1})\, e^{r_1 x}$$

Donc l'ensemble des racines de l'équation $f(r) = 0$ fournit une solution contenant n constantes arbitraires. Il resterait à démontrer, comme nous l'avons dit, que les solutions particulières ainsi trouvées sont linéairement indépendantes. Au lieu de cela, nous allons prouver, ce qui est équivalent, que la solution la plus générale est précisément de la forme :

$$y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} + \dots + P_p e^{r_p x}$$

$r_1, r_2, \ldots r_p$ étant les racines distinctes de l'équation caractéristique, et $P_1, P_2 \ldots P_p$ étant des polynômes entiers, à coefficients arbitraires, dont le degré est inférieur d'une unité au degré de multiplicité de la racine r correspondante.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique ait toutes ses racines égales à r_1. Dans ce cas, si on remplace r par r_1 dans la formule (3) il vient, en supprimant e^{rx}:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = 0,$$

d'où:

$$y = P_n \;;$$

P_n étant un polynôme entier à coefficients arbitraires, de degré $n-1$. On a donc:

$$y = P_n \cdot e^{r_1 x}$$

et, le théorème est démontré dans ce cas particulier. Prouvons que s'il est vrai dans le cas de p racines distinctes de l'équation caractéristique, il est vrai dans le cas de $p+1$. Soient $r_1, r_2, \ldots r_p$, les racines de l'équation $f(r)=0$, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ leurs degrés de multiplicité, et posons:

$$y = z \cdot e^{r_1 x}.$$

L'équation donnant z est:

$$\frac{1}{1.2\ldots\alpha_1}\frac{d^{\alpha_1}z}{dx^{\alpha_1}} f^{(\alpha_1)}(r_1) + \frac{1}{1.2\ldots\alpha_1(\alpha_1+1)}\frac{d^{\alpha_1+1}z}{dx^{\alpha_1+1}} f^{(\alpha_1+1)}(r_1) + \ldots\ldots = 0$$

Nous abaisserons l'ordre de cette équation de α_1 unités, en prenant pour nouvelle fonction:

$$u = \frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}}$$

Il vient alors:

$$(5)\quad \frac{u}{1.2\ldots\alpha_1} f^{(\alpha_1)}(r_1) + \frac{1}{1.2\ldots\alpha_1(\alpha_1+1)}\frac{du}{dx} \cdot f^{(\alpha_1+1)}(r_1) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-\alpha_1}u}{dx^{n-\alpha_1}} f^{(n)}(r_1) = 0$$

u est donc déterminé par une équation homogène dont il est facile d'obtenir l'équation caractéristique; on a en effet:

$$f(x+s) = f(r) + \frac{s}{1} f(r) + \ldots + \frac{s^n}{1.2\ldots n} \cdot f^{(n)}(r).$$

Si nous remplaçons r par r_1:

$$f(r_1+s) = \frac{s^{\alpha_1}}{1.2\ldots\alpha_1} f^{(\alpha_1)}(r_1) + \cdots + \frac{s^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(r_1).$$

Rapprochons ce résultat de l'équation (5), on voit que si s est la variable de l'équation caractéristique $\varphi(s)$ cherchée, on a:

$$\varphi(s) = \frac{f(r_1+s)}{\frac{s^{\alpha_1}}{1.2\ldots\alpha_1}}$$

et par suite, pour résoudre l'équation $\varphi(s)=0$, il suffit de résoudre

$$f(r_1+s)=0$$

Cette équation admet donc pour racines les différences:

$$r_2-r_1, \quad r_3-r_1 \quad \ldots\ldots \quad r_p-r_1,$$

les degrés de multiplicité de ces racines étant respectivement:

$$\alpha_2 \quad , \quad \alpha_3 \quad , \qquad \alpha_p .$$

D'après l'hypothèse faite, la forme la plus générale de <u>u</u> est:

$$u = P_{\alpha_2} e^{(r_2-r_1)x} + P_{\alpha_3} e^{(r_3-r_1)x} + \ldots\ldots + P_{\alpha_p} e^{(r_p-r_1)x}$$

Il s'agit maintenant d'intégrer l'équation:

$$\frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}} = u$$

ou:

$$\frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}} = P_{\alpha_2} e^{s_2 x} + P_{\alpha_3} e^{s_3 x} + \ldots + P_{\alpha_p} e^{s_p x}$$

On est ramené à un problème déjà résolu: on obtient comme résultat:

$$z = Q_{\alpha_1} + Q_{\alpha_2} e^{(r_2-r_1)x} + Q_{\alpha_3} e^{(r_3-r_1)x} + \ldots + Q_{\alpha_p} e^{(r_p-r_1)x}$$

les polynômes Q étant à coefficients arbitraires et de mêmes degrés que les polynômes P correspondants. D'autre part, la valeur la plus

générale de y est $z e^{r_1 x}$; donc l'intégrale générale est bien :

$$y = Q_{\alpha_1} e^{r_1 x} + Q_{\alpha_2} e^{r_2 x} + \dots + Q_{\alpha_p} e^{r_p x}$$

et le théorème se trouve démontré complètement.

III. Méthode de Cauchy — Reprenons l'équation générale :

$$F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

l'intégrale

$$I = \int_{(c)} e^{zx} \varphi(z)\, dz$$

$\underline{c}$ étant un contour fermé, est une fonction de $\underline{x}$. Cherchons à quelle condition cette fonction satisfera à l'équation proposée. En différentiant, on a :

$$\frac{dI}{dx} = \int_{(c)} z \cdot e^{zx} \varphi(z)\, dz, \dots\dots \frac{d^n I}{dx^n} = \int_{(c)} z^n \cdot e^{zx} \varphi(z)\, dz$$

de sorte que le résultat de la substitution de I à y dans l'équation donnée est :

$$F(I) = \int_{(c)} e^{zx} (a_n + a_{n-1} z + \dots + z^n) \varphi(z)\, dz$$

Si on dispose de la fonction $\varphi(z)$ de façon que la fonction sous le signe soit holomorphe dans le contour c, $F(I)$ sera nul et l'intégrale I sera solution de l'équation proposée. Les coefficients $\underline{a}$ étant constants, le polynôme entre parenthèses est $f(z)$; il suffira donc de disposer de φ de telle sorte que :

$$\varphi(z) = \frac{G(z)}{f(z)}.$$

$G(z)$ étant holomorphe dans le contour C ; on peut d'ailleurs mettre le second membre sous la forme $\frac{G_1(z)}{f(z)} + \psi(z)$ ψ étant holomorphe et donnant toujours une intégrale nulle ; donc on n'altèrera pas la généralité du résultat en supposant que la fonction $G(z)$ se réduise à un polynôme entier de degré $n-1$, à coefficients arbitraires ; on obtient donc :

$$I = \int_{(c)} e^{zx} \frac{G(z)}{f(z)}\, dz$$

fonction qui contient linéairement n constantes arbitraires, et qui, par conséquent répond à la question.

Les pôles de la fonction sous le signe sont les quantités que l'on a représentées par $r_1, r_2, r_3, \ldots r_q$; l'intégrale I se réduit donc à la somme des résidus correspondants, et en les calculant on retombe aisément sur la forme générale:

$$y = P_{\alpha_1} \cdot e^{r_1 x} + P_{\alpha_2} e^{r_2 x} + \ldots + P_{\alpha_q} e^{r_q x}$$

Remarque — Il peut arriver, l'équation donnée étant à coefficients réels, qu'on désire n'introduire dans les intégrales que des quantités réelles; on remarquera que si une racine est imaginaire de la forme $\alpha + i\beta$, l'équation caractéristique admet la racine conjuguée $\alpha - i\beta$ un même nombre de fois; l'ensemble de ces deux racines donnera lieu à la somme suivante:

$$P_K e^{(\alpha+i\beta)x} + P'_K e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \left[(P_K + P'_K) \operatorname{Cos} \beta + i\, (P_K - P'_K) \operatorname{Sin} \beta x \right]$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$e^{\alpha x} (H \operatorname{Cos} \beta x + L \operatorname{Sin} \beta x)$$

H et L étant deux polynômes entiers à coefficients arbitraires, de degré $K-1$.

IV — Exemples — Soit à intégrer l'équation:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

On a ici:

$$f(r) = r^3 + 3r^2 - r - 3 = (r+3)(r^2-1)$$

Les racines sont:

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = -1 \qquad r_3 = -3$$

l'intégrale générale est donc:

$$y = Ce^{x} + C'e^{-x} + C''e^{-3x}$$

2° — Soit encore l'équation:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^2} - 3\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

On a:

$$f(r) = r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - r = (r=1)\, r^3 - 3r(r+1) - 2(r+1) = (r+1)$$

$$f(r) = (r+1)^2\, (r^2 + r - 2) = (r+1)^3\, (r-2)$$

D'où l'on conclut, pour l'intégrale générale:

$$y = Ce^{2x} + (C' + C''x + C'''x^2)e^{-x}$$

3°._ Soit enfin:

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 6\frac{d^3y}{dx^3} - 42\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} - 63y = 0$$

L'équation caractéristique est ici:

$$f(r) = r^5 - 7$$

Il y a une racine simple $r_1 = 7$, deux racines doubles $r_2 = 3i$ $r_2 = -3i$ et l'intégrale générale est:

$$y = Ce^{x} + (M + Nx)\cos 3x + (P + Qx)\sin 3x.$$

V_ Coefficients variables _ Les procédés d'intégration que nous avons donnés s'appliquent, dans des cas particuliers à de certaines équations à coefficients variables.

Reprenons l'équation générale:

$$F(y) = \frac{d^ny}{dy} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \qquad + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

où les A sont des fonctions de x. Si on y fait la substitution $y = e^{rx}$, en supposant toujours x constant on aura:

$$F(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + A_1 r^{n-1} + \cdots\cdots + A_{n-1} r + A_n)$$

La parenthèse est ici une fonction de r et de x; s'il arrive qu'elle admette pour r une racine indépendante de x, on aura une intégrale particulière de l'équation donnée.

Par exemple l'équation:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + (6x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + (6x - x^2)\frac{dy}{dx} - x^2 y = 0\,,$$

donnera comme équation caractéristique :

$$r^3+(6x+1)r^2+(6x-x^2)r-x^2=0$$

elle est vérifiée pour $r=-1$ et donne une intégrale particulière $y=e^{-x}$ dont la connaissance permet comme nous le verrons, d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation proposée.

Remarque — Il peut arriver qu'un changement de variable qui conserve, comme nous l'avons vu, la forme linéaire, transforme une équation à coefficients variables en une autre à coefficients constants ; c'est le cas de l'équation :

$$a_0(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\qquad+a_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

si on y fait la substitution :

$$a+bx=e^t,$$

on a :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{b}{a+bx}=be^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

et en général :

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}=\frac{d}{dt}\frac{d^p}{dx^p}be^{-t}$$

Il suit de là que de proche en proche on pourra exprimer toutes les dérivées par rapport à x sous la forme :

$$\frac{d^py}{dx^p}=e^{-t}\left(\alpha y+\alpha_1\frac{dy}{dt}+\cdots\cdots+\alpha_p\frac{d^py}{dt^p}\right).$$

$\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_p$ étant des constantes ; on sera donc ramené à une équation linéaire, toujours sans second membre et à coefficients constants.

VI — Equation de Laplace — l'équation :

$$(1)\qquad F(y)=(ax+b)\frac{d^ny}{dx^n}+(a_1x+b_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\qquad+(a_{n-1}x+b_{n-1})\frac{dy}{dx}+(a_nx+b_n)y=0$$

où les $\underline{a}$ et les $\underline{b}$ sont des constantes, a été intégrée par Laplace à l'aide d'une transformation très analogue à la méthode donnée par Cauchy pour le cas d'une équation à coefficients constants et qui s'étend sans difficulté, dans un grand nombre de cas, aux coefficients variables.

Cherchons une solution de la forme :

$$(2) \qquad y = \int_{(C)} \varphi(z) e^{zx} dz$$

le contour (C) d'intégration étant pour le moment indéterminé, ainsi que la fonction $\varphi(z)$. On a immédiatement :

$$(3) \qquad F(y) = \int_{(C)} (Px+Q)\varphi(z) e^{zx} dz.$$

en désignant par P et Q les deux polynomes

$$P = a z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

$$Q = b z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

Si nous considérons la fonction

$$(4) \qquad V = P e^{zx} \varphi(z),$$

nous pourrons écrire la relation (3) sous la forme :

$$F(y) = \int_{(C)} dV + (\varphi Q - P\varphi' - \varphi P') e^{zx} dz$$

et elle se réduira à

$$F(y = \int_{(C)} dV.$$

Si on prend pour la fonction φ une solution de l'équation :

$$(5) \qquad P\varphi' + \varphi P' = \varphi \cdot Q;$$

qui est linéaire et du premier ordre et qui par suite s'intègre sans difficulté ; on a ainsi :

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{1}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dz} \qquad F(y) = V_1 - V_0$$

V_1, V_0 étant les valeurs que prend, à l'origine et à l'extrémité du contour (C) la fonction :

$$(7) \qquad V = e^{zx + \int \frac{Q}{P} dz}$$

l'intégrale représentant une fonction primitive quelconque, choisie une fois pour toutes, de la fonction rationnelle $\frac{R}{P}$.

Si maintenant on veut que la formule (2) fournisse une solution de

l'équation (1), il suffira évidemment de prendre pour ligne (C) d'intégra-
tion une ligne telle que $V_1 = V_0$.

Nous allons voir qu'on peut déterminer n contours de cette nature.

Décomposons en effet la fraction $\frac{P}{Q}$ en fractions simples et soit

$$\frac{P}{Q} = gx^{p} + g_1 x^{p+1} + \cdots + g_p + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} \quad + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \frac{L_1}{x-l} \quad \frac{L_2}{(x-l)^2} \cdots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}$$

la somme des exposants $p, \alpha, \ldots \lambda$ étant égale à n ; nous trouverons de
trois manières des contours répondant à la question.

1° — Dans le voisinage de $z = a$, on peut écrire :

$$V = W (z-a)^{A_1} e^{-\frac{A_2}{(z-a)} - \frac{A_3}{2(z-a)^2} \cdots - \frac{A_\alpha}{(\alpha-1)(z-a)^{\alpha-1}}}$$

W étant finie et uniforme ; lorsque z tend vers a l'exposant devient infini
le module de l'exponentielle devient alors nul ou infini suivant la par-
réelle de cet exposant est négative ou positive, pour z infiniment vois-
de a. Il suffit alors de considérer le terme du degré le plus élevé, l'argu-
de ce terme est égal à $\theta - (\alpha - 1)\varphi$, si on pose :

$$-\frac{A_\alpha}{\alpha-1} = re^{\theta i} \qquad z - a = \rho e^{i\varphi}$$

la partie réelle changera de signe quand cet argument deviendra égal à u-
multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\varphi = \frac{\theta}{\alpha-1} + \frac{2K+1}{\alpha-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Menons par le point a les $2\alpha - 2$ droites définies par cette relati-
elles décomposent le plan en $2\alpha - 2$ secteurs ; si on imagine le point z
déplaçant à une petite distance de a la partie réelle de l'exposant s-
par exemple négative dans les secteurs de rang impair, positive dan-
ceux de rang pair, V s'annulera donc toutes les fois qu'on viendra ab-
à a par un chemin situé dans un secteur impair.

Donc on aura $V_1 = V_0 = 0$, si on prend un chemin fermé C pa-
du point a suivant une direction appartenant au premier secteur e-
revenant aboutir au même point, soit dans le 3e soit dans le 5e ... ; -
nombre des chemins différents ainsi obtenus sera égal à $\alpha - 1$.

2° — La partie entière de $\frac{P}{Q}$ peut être considérée comme corresp-
dant à un pôle d'ordre p rejeté à l'infini ; on en déduit, par analogie
nouveau système répondant à la question ; on pourrait en effet men-
d'un point quelconque du plan $2p + 2$ directions partageant le plan

secteurs tels que (z) étant suffisamment grand, V ait un module infiniment grand dans les secteurs de rang pair, infiniment petit dans les secteurs de rang impair. On prendra alors pour contour C une branche infinie ayant sa direction asymptotique initiale dans le 1er secteur, et sa direction finale dans l'un quelconque des autres secteurs impairs. On aurait ainsi $p+1$ contours répondant à la question.

3°. Nous avons obtenu un nombre d'intégrales particulières égal à :

$$(\alpha-1)+(\beta-1)+\cdots+(\lambda-1)+p+1=n-K+1$$

K étant le nombre des racines distinctes de $Q=0$. Il reste donc à trouver $K-1$ autres chemins fournissant des intégrales. — Pour cela il suffit de construire un système de lacets ayant pour origine commune un point quelconque O et entourant les différents points $a, b, c \ldots l$, désignons par (a), $(a)^{-1}$ le même lacet parcouru, d'abord dans le sens direct, puis en sens contraire.

On voit immédiatement que le lacet (a) multiplie V par $e^{2i\pi A}$.

Cette fonction V se reproduira donc avec sa valeur initiale, si on prend l'un quelconque des $(K-1)$ chemins suivants :

$$(a)(b)(a)^{-1}.(b)^{-1}, \quad (a)(c)(a)^{-1}(c)^{-1}, \quad \ldots\ldots \quad (a)(l)(a)^{-1}(l)^{-1}$$

En résumé si $C, C_2 \ldots\ldots C_n$ désignent les contours que nous venons de définir on a les <u>n</u> intégrales

$$y_1=\int_{(C_1)}\frac{V}{P}dz \qquad y_2=\int_{(C_2)}\frac{V}{P}dz \qquad y_n=\int_{(C_n)}\frac{V}{P}dz$$

Elles seront, en général indépendantes et donneront par suite la solution générale de l'équation de Laplace.

Onzième Leçon.

Intégration des équations linéaires non homogènes.

1 — En dehors des cas très simples que nous avons considérés, il est rare que l'on puisse intégrer les équations linéaires, homogènes ou non, à coefficients variables ; mais la connaissance d'une ou plusieurs intégrales particulières permet ou de faire disparaître le second membre, ou d'abaisser l'ordre de l'équation, tout en lui conservant la forme linéaire.

Soit une équation linéaire complète :

$$(1) \qquad F(y)=\varphi(x).$$

Posons : $y = y_1 z$

y_1 étant une solution particulière de l'équation sans second membr
L'équation devient :

$$(2)\quad B_{n-1}\frac{dz}{dx} + B_{n-2}\frac{d^2z}{dx^2} + \cdots + B_0\frac{d^xz}{dx^n} = \varphi(x)$$

Si l'on pose $\frac{dz}{dx} = u$, on sera ramené à intégrer une équation de la f

$$G(u) = \varphi(x)$$

G ne contenant que des dérivées d'ordre $n-1$ au plus. Donc, quand on con
une solution particulière de l'équation sans second membre, on peut
jours abaisser d'une unité l'ordre de l'équation donnée.

Supposons au contraire que y_1 soit une solution particulière d
l'équation complète, dans ce cas, en faisant

$$y = y_1 + z$$

on est ramené à chercher l'intégrale de l'équation.

$$F(z) = 0$$

Théorème — Quand on connaît une solution quelconque de l
tion complète, on a l'intégrale générale en ajoutant cette solution parti
à l'intégrale générale de l'équation sans second membre

Dans certains cas on peut apercevoir aisément une solution p
ticulière de l'équation. Supposons, par exemple, que les coefficients soi
constants et que le second membre $\varphi(x)$ soit un polynome entier en
il est évident qu'on pourra satisfaire à l'équation proposée en prenant
y_1 un polynome à coefficients convenables. La méthode des coefficients i
terminés fournira sans peine cette intégrale.

Exemple. — Soit l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x - 3x^2$$

Cherchons une solution de la forme :

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A.$$

Substituons et écrivons que les polynomes des deux membres so
identiques.

$$2A + 3B + 2C = 0$$
$$6A + 2B = 1$$
$$2A = -3$$

D'où $A = -\frac{3}{2}$, $B = 5$, $C = -6$.

Une solution particulière de l'équation est donc :

$$y_1 = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - 6$$

Cherchons maintenant l'intégrale générale de l'équation sans second membre ; l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

et a pour racines : $r_1 = -1$, $r_2 = -2$

L'intégrale est donc : $\lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$

λ et μ étant deux constantes arbitraires, et par suite, on a l'équation donnée :

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 6.$$

Le même procédé s'applique dans le cas où le second membre est de la forme $A \cos mx + B \sin mx$, le premier membre étant toujours à coefficients constants.

Exemple. — Proposons-nous d'intégrer l'équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$$

Posons : $y = \alpha \sin x + \beta \cos x$

α, β étant des constantes que nous voulons déterminer ; on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha \sin x - \beta \cos x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

Si nous écrivons que l'équation est satisfaite, on a comme conditions :

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = 0$$

Donc une solution particulière de l'équation est :

$$y_1 = \frac{\sin x}{4}$$

Intégrons maintenant l'équation sans second membre, les racines de l'équation caractéristique sont doubles et égales à 1 et -1, donc l'intégrale générale est : $e^x(A + Bx) + e^{-x}(C + Dx)$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires ; et par suite

$$y = e^x(A + Bx) + e^{-x}(C + Dx) + \frac{\sin x}{4},$$

Cette méthode s'applique de la même façon quand le second me[mbre] est de la forme $Ae^{mx} + Be^{-mx}$

II — Abaissement de l'ordre de l'équation. — Faisons la substituti[on]

$$y = y_1 \cdot z$$

L'équation générale $F(y) = \varphi(x)$, deviendra :

$$z\,F(y_1) + G(z) = \varphi(x).$$

$G(z)$ étant une forme linéaire dans laquelle z ne figurera que par se[s] dérivées ;

Si donc y_1 est solution de l'équation sans second membre $F(y)=$[0] en posant $\frac{dz}{dx} = u$, on sera ramené à une équation linéaire, non h[o]mogène, mais de l'ordre $n-1$.

Plus généralement supposons que l'on connaisse p intégrales p[ar]ticulières de l'équation sans second membre, linéairement indépendan[tes] on peut alors abaisser de p unités, l'ordre de l'équation.

Soient en effet p solutions $y_1, y_2 \ldots\ldots y_p$ de l'équation $F(y)$[=0]
En faisant la substitution : $y = y_1 \cdot z$
et en posant : $\frac{dz}{dx} = u$,
on est ramené à un résultat de la forme :

$$(3) \qquad B_0 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1} = 0$$

Cette équation admet les $p-1$ solutions suivantes :

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad \left(\frac{y_3}{y_1}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots \quad \left(\frac{y_p}{y_1}\right)'$$

Ces $p-1$ solutions sont distinctes, sinon on aurait identiquement

$$C_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + C_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \cdots + C_p\left(\frac{y_p}{y_1}\right)' = 0$$

d'où :

$$C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots C_p y_p = -C_1 y_1$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse. De même les solutions pa[r]ticulières de l'équation déduite de (3) en posant $u = u_1 v$ seront distinct[es] et au nombre de $p-2$. On voit donc bien ainsi qu'on arrivera à abaiss[er] l'ordre de l'équation proposée de p unités.

Conséquence. — Il suit de là que si l'on connaît l'intégrale générale ou, ce qui revient au même n intégrales distinctes de l'équati[on]

$$F(y) = 0,$$

On pourra de proche en proche abaisser l'ordre des intégrations de n unités ; on sera ainsi ramené à une équation telle que :

$$\psi(x) \cdot \frac{dw}{dx} = \varphi(x)$$

et l'intégrale s'obtient par une quadrature. Donc :

Théorème. — Quand on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre, on peut toujours trouver l'intégrale de l'équation complète.

Ce qui précède fournit, en même temps, un procédé pour arriver définitivement à l'intégrale, mais le même théorème peut s'établir autrement et on peut, par différents procédés passer de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, à l'intégrale générale ou, ce qui revient au même, à une intégrale particulière de l'équation complète.

Méthode de Cauchy. — Soit :

$$(1) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \dots + C_n y_n$$

l'intégrale générale de l'équation sans second membre ; α étant un nombre quelconque, on sait qu'on pourra disposer des constantes C de telle sorte que y et ses $\overline{n-1}$ premières dérivées prennent, pour $n = \alpha$, des valeurs données arbitrairement, nous choisirons pour ces valeurs initiales les suivantes :

$$(2) \qquad y = 0 \quad y' = 0 \quad y'' = 0 \qquad y^{(n-2)} = 0 \quad y^{(n)} = \varphi(\alpha)$$

Si nous portons les valeurs de $C_1, C_2 - C_n$, déterminées par les équations (2) dans l'équation (1) nous aurons pour y une valeur qui sera fonction de x et du paramètre α. Soit :

$$y = \psi(x, \alpha)$$

Puisqu'on a $\psi(\alpha, \alpha) = 0$ et que α est arbitraire, cela revient à dire que la fonction ψ s'annule lorsque les deux variables indépendantes α, x, deviennent égales, on a donc $\psi(x, x) = 0$. Le même raisonnement s'applique aux dérivées partielles de ψ prises par rapport à $\underline{x}$ et on a, pour $\alpha = x$

$$(3) \qquad \psi(x,x) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,x) = 0 \qquad \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} = 0 \quad \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial x^{n-1}}(x,x) = \varphi(x)$$

Ceci posé si nous considérons l'intégrale :

$$I = \int_{x_0}^{x} \psi(x,\alpha)\, d\alpha$$

et différentions la n-1 fois par rapport à x en tenant compte des égalités (3) nous aurons :

$$\frac{dI}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{dx}\, d\alpha \qquad \frac{d^2 I}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, d\alpha \qquad \frac{d^{(n-1)} I}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial x^{n-1}}\, d\alpha$$

$$\frac{d^n I}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}\, d\alpha + \varphi(x).$$

Si nous substituons dans l'équation différentielle donnée nous aurons :

$$F(I) = \int_{x_0}^{x} F(\psi)\, d\alpha + \varphi(x)$$

En supposant le premier coefficient A égal à l'unité. – Comme d'ailleurs ψ est une solution de l'équation sans second membre, l'égalité précédente se réduit à :

$$F(I) = \varphi(x)$$

donc l'intégrale I est une solution de l'équation complète, et celle ci a pour intégrale générale :

$$y = C_1 y_1 \; C_2 y_2 \cdots\cdots\cdots + C_n y_n + \int_{x_0} \psi(x,\alpha)\, d\alpha.$$

IV — Variation des arbitraires. – Reprenons l'intégrale de l'équation sans second membre :

$$(4) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \cdots + C_n y_n$$

et imaginons qu'on y remplace les C par des fonctions de x ; on pourra faire représenter au second membre telle fonction qu'on voudra, tout en imposant à ces fonctions $C_1, C_2 \ldots C_n$. n-1 conditions arbitrairement choisies ; nous déterminerons ces fonctions de telle sorte que
. 1° la formule (4) donne une solution de l'équation complète.
2° les n-1 premières dérivées de y aient la même forme que si les C étaient des constantes.

On obtient alors pour les dérivées successives :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} \qquad + C_n \frac{dy_0}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} \qquad + C_n \frac{d^2 y_n}{dx^2}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \qquad + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + \cdots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_n}{dx}$$

a la condition de poser :

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} \qquad + y_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} \dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} \dfrac{dC_2}{dx} \qquad + \dfrac{dy_n}{dx} \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \dfrac{dC_2}{dx} \qquad + \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^n} \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \end{cases}$$

si on exprime que y vérifie l'équation donnée, on aura simplement :

$$(6) \qquad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = \varphi(x)$$

Les équations (5) et (6) dont le déterminant n'est pas nul admettent une solution :

$$\frac{dC_1}{dx} = \psi_1(x) \quad \frac{dC_2}{dx} = \psi_2(x) \qquad \frac{dC_n}{dx} = \psi_n(x)$$

d'où l'on déduit les C par des quadratures. — Si on effectue chacune de ces quadratures à partir d'une limite inférieure fixe on aura une intégrale particulière de l'équation complète ; si on prend au contraire les intégrales indéfinies on introduira n constantes arbitraires et la formule (4) donnera directement l'intégrale générale de l'équation complète.

V — Exemples

— Nous donnerons pour terminer, quelques exemples d'intégration, d'équations linéaires, avec ou sans second membre.

1° Équation de Bessel. — Nous avons rencontré dans l'études des intégrales définies, la fonction :

$$I_n = \int_0^1 (1-z^2)^{n-1} \cos zx \, dz.$$

Elle donne lieu, par un calcul immédiat, aux deux relations :

$$\frac{dI_n}{dx} = -\frac{x}{2n} I_{n+1} \qquad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = I_{n+1} - I_n$$

d'où l'on conclut, en éliminant I_{n+1} que I_n est solution de l'équation du 2e ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Cette équation connue sous le nom d'équation de Bessel ; - c'est un cas particulier de l'équation de Laplace que nous avons appris à intégrer. La fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ se réduirait ici à $\frac{2nz}{z^2+1}$, les points singuliers étant $z = \pm i$ on formerait aisément deux intégrales indépendantes. On peut aussi se servir de la solution connue $y = I_n$ pour abaisser l'équation au 1er ordre. Si on pose en effet :

$$y = u\, I_n \qquad \frac{du}{dx} = v$$

il vient :

$$I_n \frac{dv}{dx} = 2v \times \left(\frac{x}{2n} I_{n+1} - \frac{n}{x} I_n\right)$$

d'où l'on déduit, par deux quadratures, la valeur générale de y ; les calculs sont les mêmes que ceux auxquels conduirait la transformation de Laplace.

2° Le polynome X_n de Legendre satisfait également à une équation du 2e ordre, sans second membre ; nous nous arrêterons un instant aux propriétés fondamentales de ces polynômes.

Par définition X_n est le coefficient de α^n dans le développement de :

$$(1) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 \; \dots + \alpha^n X_n + \dots$$

Si on différentie par rapport à α :

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)\,(X_1 + 2\alpha X_2 + 3\alpha^2 X_3 + \dots + n\alpha^{n-1} \dots$$

d'où, en identifiant les deux valeurs du radical :

$$(2) \qquad (n+1)\, X_{n+1} - (2n+1)\, x\, X_n + n\, X_{n-1} = 0.$$

En développant la relation (1) par la série de Lagrange, on obtient

pour X_n la forme réduite

$$(3) \qquad X_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^n \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^n}.$$

Si on veut d'ailleurs vérifier cette relation on peut procéder de la manière suivante ; posant :

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^n} \qquad A_0 = 1$$

Calculant par la formule du binôme les coefficients g_{n+1} et g_{n-1} de x^p dans A_{n+1}, A_{n-1} et le coefficient h_n de x^{p-1} dans A_n on vérifiera l'égalité

$$(n+1)\, g_{n+1} - (2n+1) h_n + n\, g_n = 0$$

Donc les A_n vérifient la relation recurrente (2) et comme on a évidemment $X_0 = 1$, $X_1 = A_1 = x$ on en conclut $X_n = A_n$.

La forme (3) est celle sous laquelle nous avons envisagé X_n à propos du calcul numérique des intégrales définies.

Si on dérive deux fois l'équation (1) d'abord par rapport à α, puis par rapport à x, on obtient la relation débarrassée de radicaux :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$$

Si on y remplace u par son développement et qu'on égale les termes en α^n on a :

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^2 X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0$$

Nous sommes donc amenés à l'équation du second ordre :

$$(5) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0$$

ou n est entier et positif .. et que nous pouvons intégrer complètement X_n étant une solution nous poserons :

$$y = v X_n, \quad \frac{dy}{dx} = v\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dv}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{d^2v}{dx^2}$$

et v sera déterminé par les deux équations

$$\frac{dv}{dx} = w \qquad (1-x^2)\frac{dw}{dx} + w\left[(1-x^2)\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n} - x\right] = 0$$

La dernière peut s'écrire

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{2}{X_n}\cdot\frac{dX_n}{dx} - \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

et admet l'intégrale évidente:

$$w\,X_n^2\,(1-x^2) = \text{Const.}$$

Prenons la constante égale à 1 nous aurons une seconde solution de l'équation (5).

$$w = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)X_n^2} \qquad y = -X_n\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2}$$

La quadrature s'achève aisément. Toutes les racines du dénomin[ateur] sauf +1 et -1 sont doubles (elles sont d'ailleurs réelles; les résidus correspondants sont nuls; ceux qui correspondent à +1 et -1 sont respectivement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; on a donc

$$y = X_n\left[\operatorname{Log}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} \cdots\cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right]$$

α_i étant l'une des racines de $X_n = 0$ et A_i le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha_i}$ dans le développement en fractions simples.

3° Nous donnerons enfin un exemple d'intégration d'équation av[ec] second membre. Soit à intégrer l'équation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{\alpha}{x^2-1}$$

L'équation sans second membre s'intègre en posant $x = e^t$ on [a] pour son intégrale générale:

$$y = Ax + \frac{B}{x}.$$

Suivant la méthode de Cauchy disposons de A.B, de telle sorte q[ue] l'on ait, pour $x = \alpha$:

$$A\alpha + \frac{B}{\alpha} = 0 \qquad A - \frac{B}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}$$

ces conditions déterminent A, B

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda^2-1} \qquad B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \lambda^2}{\lambda^2-1}$$

On aura donc une solution particulière en posant

$$y = \frac{a}{2}\int_{x_0}^{x} \left[\frac{x}{\lambda^2-1} - \frac{\lambda^2}{x(\lambda^2-1)}\right] d\lambda = \frac{a}{2x}\int_{x_0}^{x} \frac{x^2-\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda$$

et enfin pour l'intégrale générale

$$y = Ax + \frac{B}{x} + \frac{a}{2x}\left[(x^2-1)\, \text{Lg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - x\right]$$



Douzième Leçon.

Systèmes d'équations linéaires.

I — Un système d'équations d'ordre quelconque peut toujours être ramené, soit à une équation unique, soit à un système du premier ordre ; si les équations primitives sont toutes linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées des divers ordres, cette formule linéaire subsistera à travers toutes les opérations effectuées pour obtenir cette réduction. L'étude du système linéaire le plus général est donc contenue dans l'étude d'une équation linéaire unique d'ordre n. Cependant il y a intérêt à considérer directement le cas d'un système du 1er ordre.

Supposons les équations résolues par rapport aux dérivées et mises sous la forme :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} + a_1 u + b_1 v + c_1 w &= g_1 \\ \frac{dv}{dx} + a_2 u + b_2 v + c_2 w &= g_2 \\ \frac{dw}{dx} + a_3 u + b_3 v + c_3 w &= g_3 \end{aligned}$$

Les a. b. c, - g étant des fonctions de x, représentons symboliquement par F_1, F_2, F_3 ce que deviennent les premiers membres quand on y remplace u, v, w par des fonctions données contenant la variable

x, et au besoin, de certains paramètres α, β. – Les fonctions F jouissent
évidemment des propriétés très simples exprimées par les identités sui

$$F(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2) = F(u_1, v_1, w_1) + F(u_2 v_2$$

(2) $$F(cu\ cv\ cw) = CF(u,v,w) \qquad C \text{ étant une const}$$

$$\frac{\partial^p F[\varphi(x,\alpha), \psi(x,\alpha), \chi(x,\alpha)]}{\partial\alpha^p} = F\left[\frac{\partial^p\varphi}{\partial\alpha^p}, \frac{\partial^p\psi}{\partial\alpha^p}, \frac{\partial^p\chi}{\partial\alpha^p}\right.$$

Ces relations seraient d'ailleurs encore vraies si les F contena
linéairement des dérivées d'orde quelconque.

II – Equations sans seconds membres.

– Nous envisagerons d'
le cas où g_1 g_2 g_3 sont nuls. Soient alors :

$$u_1\ v_1\ w_1 \qquad u_2\ v_2\ w_2 \qquad u_3\ v_3\ w_3,$$

trois solutions du système proposé ; d'après les relations (2) on aura u
nouvelle solution en posant :

$$\begin{aligned} u &= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 \\ v &= C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 \\ w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3, étant des constantes quelconques. – Ces expressions (3) conten
trois constantes arbitraires, il y a lieu de penser qu'on aura ainsi
solution générale ; cherchons sous quelles conditions il en sera ainsi.

Soit x_0 une valeur déterminée quelconque attribuée à x ; pou
la solution (3) soit l'intégrale générale, il faut que l'on puisse dispo
de $C_1, C_2 C_3$ de telle sorte que u, v, w prennent des valeurs arbitraires a, b
pour $x = x_0$, il faut pour cela que le déterminant

(4) $$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de 0 pour $x = x_0$ et comme x_0 est l'une quelconque des va
pour lesquelles les intégrales sont supposées exister il faut qu'on ait
pour toutes ces valeurs :

(5) $$D \neq 0$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Supposons la en effet
plie et considérons les équations

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1\lambda(x)+u_2\mu(x)+u_3\theta(x)&=U\\ v_1\lambda(x)+v_2\mu(x)+v_3\theta(x)&=V\\ w_1\lambda(x)+w_2\mu(x)+w_3\theta(x)&=W \end{aligned}$$

elles seront, dans le champ considéré, résolubles par rapport à λ, μ, θ; supposons que U, V, W soit une solution quelconque du système proposé si nous faisons la substitution dans l'une quelconque de nos équations; par exemple dans la première, nous aurons:

$$\lambda F_1(u_1 v_1 w_1)+\mu F_1(u_2 v_2 w_2)+\theta F_1(u_3 v_3 w_3)+u_1\frac{d\lambda}{dx}+u_2\frac{d\mu}{dx}+u_3\frac{d\theta}{dx}=0$$

Donc les fonctions λ, μ, θ seront déterminées par les conditions

$$\begin{aligned} u_1\lambda'+u_2\mu'+u_3\theta'&=0\\ v_1\lambda'+v_2\mu'+v_3\theta'&=0\\ w_1\lambda'+w_2\mu'+w_3\theta'&=0 \end{aligned}$$

et comme le déterminant de ces équations n'est pas nul, elles n'admettent d'autre solution que $\lambda'=\mu'=\theta'=0$. Donc $\lambda\,\mu\,\nu$ doivent être constants, et les formules (6) ne sont qu'un cas particulier des formules (3) qui par suite donnent bien l'intégrale générale.

– D'après cela l'intégration se trouve ramenée à la recherche de trois solutions dont le déterminant ne soit pas nul, nous dirons plus rapidement que ces solutions sont distinctes.

III – Coëfficients constants

– L'intégration peut être conduite jusqu'au bout quand les coefficients sont constants. Considérons le système

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx}+a_1u+b_1v+c_1w&=0\\ \frac{dv}{dx}+a_2u+b_2v+c_2w&=0\\ \frac{dw}{dx}+a_3u+b_3v+c_3w&=0 \end{aligned}$$

où les coefficients sont constants, cherchons à le vérifier par une solution de la forme:

$$(8)\qquad u=\alpha e^{rx}\qquad v=\beta e^{rx}\qquad w=\gamma e^{rx}$$

α, β, γ, r étant des constantes, on aura en supprimant le facteur e^{rx}.

$$(9)\qquad \begin{cases} (a_1+r)\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ a_2\alpha + (b_2+r)\beta + c_2\gamma = 0 \\ a_3\alpha + b_3\beta + (c_3+r)\gamma = 0 \end{cases}$$

Si on laisse de côté la solution évidente et inutile $u = v = w = 0$, on doit supposer que α, β, γ ne sont pas nuls ensemble ; dès lors r doit être une racine de l'équation :

$$(10)\qquad f(r) = \begin{vmatrix} a_1 + r & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_1 + r & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + r \end{vmatrix} = 0$$

Si cette condition est vérifiée les équations (9) se réduiront à deux et fourniront des valeurs de α, β, γ, proportionnels à un système de mineurs du déterminant $f(r)$; chaque racine de l'équation conduira donc à une solution du système (7)

Désignons par A, B, C, A_2 .. C_3 les mineurs de $f(r)$, une au moins des lignes est formée trois mineurs qui ne sont pas tous nuls ; supposons que ce soit la première et faisons la substitution

$$(11)\qquad u = A_1 e^{rx} \qquad v = B_1 e^{rx} \qquad w = C_1 e^{rx}$$

on voit immédiatement que les deux dernières des équations (7) seront vérifiées quelque soit r ; quant à la première elle ne le sera que si r est racine de l'équation (10) car on a :

$$F_1\,(A_1 e^{rx}, B_1 e^{rx}, C_1 e^{rx}) = e^{rx}\ f(r)$$

Si r est racine simple de $f(r) = 0$, on aura une solution (11) du système proposé.. Supposons r racine double de $f(r) = 0$. Si nous différentions l'identité précédente, nous aurons, d'après la dernière des relations (2) le même résultat qu'en substituant les dérivés des valeurs (11) prises par rapport à r et ce résultat sera :

$$e^{rx}\left[f(r) + x\, f'(r)\right]$$

Il sera nul puisque r est une racine double. De même si r était racine triple, on aurait une nouvelle solution en différentiant une seconde fois la solution (11) par rapport à r et ainsi de suite s'il s'agissait d'un nombre quelconque d'équations.

D'après cela chaque racine de l'équation (10) fournira autant

de systèmes de solutions qu'il y aura d'unités dans son degré de multiplicité.

Il resterait à démontrer que les trois solutions obtenues sont distinctes; on peut éviter cette démonstration en reprenant la question par une autre méthode.

IV. **Méthode de Cauchy**.. Cherchons à vérifier les équations (7) par une solution de la forme

$$(12)\qquad \begin{aligned} u &= \int_{(c)} \frac{A_1\varphi(z)+A_2\psi(z)+A_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \\ v &= \int_{(c)} \frac{B_1\varphi(z)+B_2\psi(z)+B_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \\ w &= \int_{(c)} \frac{C_1\varphi(z)+C_2\psi(z)+C_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \end{aligned}$$

le contour C étant un contour fermé quelconque, et φ, ψ, χ des fonctions convenablement choisies. Nous aurons en substituant ces valeurs:

$$F_1 = \int \frac{e^{zx}}{f(z)}\left[\varphi(A_1(a_1+z)+B_1 b_1+b_1 c_1] + \psi[A_2(a_1+z)+B_2 b_1 + C_2 c_1] + \dots\right] dz = \int e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

$$F_2 = \int e^{zx}\psi(z)\,dz$$

$$F_3 = \int e^{zx}\chi(z)\,dz$$

Ces intégrales seront nulles si φ, χ, ψ sont des fonctions entières quelconques; le plus simple est de les prendre égales à trois constantes arbitraires et les formules (12) fourniront alors une solution des équations proposées.

Les fonctions sous le signe auront pour pôles les racines de l'équation (10) et si l'on suppose que (C) entoure toutes ces racines, les intégrales se calculeront comme étant la somme des résidus correspondants; on retrouve ainsi sans difficulté la solution que nous avons donnée plus haut, mais l'avantage de la méthode actuelle est de nous permettre de démontrer que l'on a ainsi la solution la plus générale.

Il suffit en effet de faire voir que pour $x = 0$ les seconds membres des équations (12 peuvent prendre des valeurs arbitraires. Or la première, par exemple, se réduit à:

$$\int \frac{A_1\varphi + A_2\psi + A_3\chi}{f(z)}\, dz$$

On a d'ailleurs:

$$A_1\varphi + A_2\psi + A_3\chi = \begin{vmatrix} \varphi & b_1 & c_1 \\ \psi & b_2+z & c_2 \\ \chi & b_3 & c_3+z \end{vmatrix} = \varphi . z^2 + mz + n \qquad f(z) = z^3 + \dots$$

d'où:

$$\int_{(c)} \frac{A_1\varphi + A_2\psi + A_3\chi}{f(z)}\, dz = 2i\pi . \varphi .$$

On aurait de même $2i\pi\psi$, $2i\pi\chi$ pour les autres valeurs initiales pour qu'elles aient des valeurs données $u_0\ v_0\ w_0$ il suffira donc de prendre

$$\varphi = \frac{u_0}{2i\pi} \quad \psi = \frac{v_0}{2i\pi} \quad \chi = \frac{w_0}{2i\pi}$$

V - Exemples

Soit d'abord le système :

$$\frac{du}{dx} - 3u + 8v - 4w = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + u - 5v + 2w = 0$$

$$\frac{dw}{dx} + 3u + 14v + 6w = 0$$

On a ici

$$f(r) = \begin{vmatrix} r-3 & 8 & -4 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & -14 & r+6 \end{vmatrix} = (r-1)(r+1)(r-2)$$

$$A_1 = r^2 + r - 2 \qquad B_1 = -r \qquad C_1 = 1 - 3r$$

On peut former le tableau suivant :

r	α	β	γ
1	0	-1	-2
-1	-2	+1	4
2	4	-2	-5

$$u_1 = 0 \qquad v_1 = e^{x} \qquad w_1 = rc^{x}$$

$$u_2 = -2e^{-x} \qquad v_2 = e^{-x} \qquad w_2 = 4e^{-x}$$

$$u_3 = 4e^{2x} \qquad v_3 = -2e^{2x} \qquad w_3 = -5e^{2x}$$

et les intégrales générales sont :

$$u = -2C_2 e^{-x} + 4C_3 e^{2x}$$

$$v = -C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x}$$

$$w = -2C_1 e^{x} + 4C_2 e^{-x} - 5C_3 e^{2x}$$

Soit encore à intégrer

$$\frac{du}{dx} - 4u + 18v - 9w = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + u - 5v + 2w = 0$$

$$\frac{du}{dx} + 3u - 14v + 6w = 0$$

On a ici

$$f(r) = \begin{vmatrix} r-4 & 18 & -9 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & -14 & r+6 \end{vmatrix} = (r-1)^3 \qquad \begin{matrix} A = r^2 + r - 2 \\ B_1 = -r \\ C_1 = -3r + 1 \end{matrix}$$

On a donc à considérer ces 3 fonctions.

$$e^{rx}(r^2 + 2 - 2) \qquad -re^{rx} \qquad (1 - 3r)e^{rx}$$

et leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à r, ce qui donne :

$$e^{rx}\left[2r+1+x(r^2+r-2)\right] \quad e^{rx}(-1-rx) \quad e^{rx}\left[-3+x(1-3r)\right]$$

$$e^{rx}\left[2+r(2r+1)x+x^2(r^2+r-2)\right] \quad e^{rx}(-2x-rx^2) \quad e^{rx}\left[-6x+x^2(1-3r)\right] ;$$

en y faisant $r=1$ on a trois intégrales particulières :

$$u_1 = 0 \qquad v_1 = e^x \qquad w_1 = -2e^x$$
$$u_2 = 3e^x \qquad v_2 = -(1+x)e^x \qquad w_2 = -(3+2x)e^x$$
$$u_3 = (2+6x)e^x \qquad v_3 = -(2x+x^2)e^x \qquad w_3 = -(6x+2x^2)e^x$$

et on en déduit pour la solution générale :

$$u = 3C_2 e^x + 2C_3(1+3x)e^x$$
$$v = -C_1 e^x - C_2(1+x)e^x - C_3 x(x+2)e^x$$
$$w = -2C_1 e^x - C_2(3+2x)e^x - 2C_3(3x+x^2)e^x .$$

VI - Cas où il y a des seconds membres

Revenons au cas général où les coefficients sont des fonctions de x et où les seconds membres g_1, g_2, g_3 ne sont pas nuls. Supposons qu'on connaisse une intégrale particulière $u_1 v_1 w_1$ du système donné et faisons la substitution :

$$u = u_1 + U \qquad v = v_1 + V \qquad w = w_1 + W ;$$

l'une quelconque des équations (1) prendra la forme :

$$F(U, V, W) + F(u_1, v_1, w_1) = g$$

et le système se réduira par suite à

$$F_1(U, V, W) = 0 \qquad F_2(U, V, W) = 0 \qquad F_3(U, V, W) = 0$$

d'où le théorème suivant :

Théorème - Quand on connaît une solution particulière, il suffit, pour avoir la solution générale, de l'ajouter à l'intégrale générale du système sans seconds membres.

On sera ainsi ramené à intégrer le système sans seconds membres ; je dis maintenant que si on peut en obtenir l'intégrale générale on en pourra déduire une intégrale particulière du système complet et par suite achever l'intégration.

En effet la solution générale du système sans seconds membres est de la forme :

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3$$
$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$
$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3$$

avec la condition :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & w_3 \\ w_1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Essayons alors de vérifier les équations proposées en posant :

$$u = u_1\varphi(x) + u_2\psi(x) + u_3\chi(x)$$
$$v = v_1\varphi(x) + v_2\psi(x) + v_3\chi(x)$$
$$w = w_1\varphi(x) + w_2\psi(x) + w_3\chi(x)$$

φ, Ψ, X étant des fonctions convenablement choisies ; nous obtenons ainsi directement les équations de condition :

$$u_1\varphi' + u_2\Psi' + u_3X' + \varphi F(u_1, v_1, w_1) + \Psi F(u_2, v_2, w_2) + X F(u_3, v_3, w_3) = g_1$$

qui se réduisent

$$u_1\varphi' + u_2\Psi' + u_3X' = g_1$$
$$v_1\varphi' + v_2\Psi' + v_3X' = g_2$$
$$w_1\varphi' + w_2\Psi' + w_3X' = g_3$$

Ces équations dont le déterminant n'est pas nul, sont résolubles par rapport à φ', Ψ', X' et donnent trois valeurs de la forme :

$$\varphi' = \Phi(x) \qquad \Psi' = \Psi(x) \qquad X' = X(x)$$

D'où l'on tire

$$\varphi = \int \Phi(x)\,dx \qquad \psi = \int \Psi(x)\,dx \qquad X = \int X(x)\,dx$$

en substituant ces valeurs dans les formules (13) on aura une solution particulière des équations données, et même la solution la plus générale, si on ne fixe pas les limites inférieures des intégrales précédentes.

Treizième Leçon.

Équations aux dérivées partielles.

I – Réduction à un système d'équations linéaires du 1er ordre. – Tout système d'équations où figurent des variables indépendantes, des fonctions de ces variables et les dérivées partielles d'ordre quelconque de ces fonctions peut être ramené, en introduisant de nouvelles fonctions et de nouvelles équations, à un système où ne figurent que des dérivées du 1er ordre, exactement comme cela a lieu pour des équations différentielles ordinaires

Si les équations données, comme cela a lieu en général, sont complétées par certaines conditions initiales imposées aux fonctions inconnues et à certaines de leurs dérivées, il est clair que le système du 1er ordre auquel on aboutira sera lui-même complété par des conditions initiales auxquelles devront satisfaire non seulement les fonctions qui figuraient dans le système primitif, mais encore les fonctions auxiliaires introduites par la transformation.

On peut même, comme nous allons le voir, donner au système du 1er ordre une forme très particulière. – Soient en effet x, y, z, t, les variables indépendantes, u, v, w, les fonctions inconnues et

$$(1) \qquad H\left(x, y, z, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$$

l'une des équations données. Introduisons les fonctions p, q, r définies par les équations

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = p \quad \frac{\partial v}{\partial t} = q \quad \frac{\partial w}{\partial t} = r.$$

Les équations (1) deviendront:

$$H\left(x, y, z, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, p, \ \dots \ \frac{\partial w}{\partial z}, r\right) = 0.$$

Or, si nous les différentions, sous cette forme, par rapport à t, nous obtiendrons un système qui ne sera pas plus général que le précédent, pourvu que nous assujettissions ses solutions à coïncider avec u, v, w, p, q, r, pour une valeur particulière t_0 de la variable de t. On aura alors substitué aux équations (1) les suivantes:

(3) $$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \dots + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \qquad = 0$$

Le système proposé est donc remplacé par celui que forment les équations (1) et (3) ce dernier est du 1er ordre et linéaire par rapport aux dérivées partielles.

II - Intégrales du système linéaire. — Supposons les équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et résolues par rapport aux dérivées partielles relatives à une même variable; soit en d'autres termes, un système de la forme suivante:

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A\dfrac{\partial u}{\partial x} + B\dfrac{\partial u}{\partial y} + C\dfrac{\partial u}{\partial z} + D\dfrac{\partial v}{\partial x} + E\dfrac{\partial v}{\partial y} + \qquad + G\dfrac{\partial w}{\partial z} + K \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = A_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + B_1\dfrac{\partial u}{\partial y} + \qquad\qquad + G_1\dfrac{\partial w}{\partial z} + K_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = A_2\dfrac{\partial u}{\partial x} + B_2\dfrac{\partial u}{\partial y} + \qquad\qquad + G_2\dfrac{\partial w}{\partial z} + K_2 \end{cases}$$

Pour simplifier le langage nous supposons nulles toutes les valeurs initiales des variables et des fonctions. Les fonctions $A B C \dots K_2$ sont supposées holomorphes par rapport à toutes les variables qui y figurent tant que le module de chacune d'elles est inférieur à un nombre fixe R.

Pour compléter le système (4) nous nous donnerons trois fonctions λ, μ, θ, dépendant des seules variables x, y, z, s'annulant pour $x = y = z = 0$, et holomorphes tant que ces variables ont un module inférieur à un nombre fixe r, au plus égal à R; nous assujettirons les fonctions u, v, w à se réduire pour $t = 0$ à λ, μ, θ, respectivement: en d'autres termes nous donnerons comme conditions initiales.

(5) $$u_0 = \lambda(x, y, z) \quad v_0 = \mu(x, y, z) \quad w_0 = \theta(x, y, z).$$

Ceci posé, l'existence des intégrales du système (4), (5) résulte du théorème suivant, dû à Cauchy.

Théorème: Il existe trois fonctions de x, y, z, t, satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. Elles se réduisent pour $t=0$ à λ, μ, θ, respectivement.

2° Elles s'annulent en même temps que les variables et sont holomorphes tant que les 4 variables conservent un module inférieur à un nombre fixe r.

3° Pour ces mêmes valeurs de $x. y. z. t$ elles vérifient identiquement les équations (4)

Remarques. — Il est facile de faire en sorte que le système donné soit, non seulement linéaire mais homogène. il suffit d'ajouter au système donné les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad f_0 = x$$

et de multiplier u, K_1 K_2 par $\frac{\partial u}{\partial x}$; car la fonction auxiliaire f. se réduit évidemment à
On peut aussi faire disparaître les variables indépendantes des fonctions A_1. B, ...
Par exemple on fera disparaître x en introduisant les équations:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \varphi_0 = x.$$

On ferait disparaître t en introduisant une fonction ψ définie par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 1 \qquad \psi_0 = 0$$

En résumé on peut faire en sorte que le système à intégrer soit du 1er ordre, linéaire et homogène, et que les coefficients dépendent seulement des fonctions inconnues et nullement des variables indépendantes.

III. — Démonstration du Théorème de Cauchy. — La démonstration analogue à celle de Briot et Bouquet pour les équations différentielles, est due à Mme Kowaleski ; nous l'exposerons rapidement en laissant de côté les détails de calcul qui sont identiques dans les deux démonstrations.

Considérons donc le système (4). A. B. C, — G, K_2 étant supposés dépendre seulement de fonctions inconnues $u. v. w$.

1°. — S'il existe une solution holomorphe répondant à la question. cette solution est unique et les développements en séries entières des fonctions inconnues peuvent être formés à priori ; il suffit en effet, pour cela, de savoir calculer pour $x=y=z=t=0$ les dérivées partielles des divers ordres de $u. v. w$. Or soit $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta}$;

si $\delta = 0$, cette dérivée se réduira, pour des valeurs nulles des variables, à $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \lambda}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0$;

elle est donc connue à priori. Si $\delta \neq 0$, il suffira de différentier toutes les équations données α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z, $\delta-1$ fois par rapport à t et on pourra de proche en proche avoir toutes les dérivées pour $t=0$ jusqu'à l'ordre $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ inclusivement. — Nous désignerons par (S) le séries ainsi obtenues.

2°. — Pour que le théorème de Cauchy soit exact il faut que dans des cercles de rayons ρ non nul, les séries (S) soient convergentes ; cette condition est d'ailleurs suffisante, on le voit exactement comme pour les

équations différentielles.

3°. Les fonctions A_i, B_j, C_k, conservent, quand u, v, w, ont un module moindre que R, un module inférieur à un nombre fixe M; de même λ, μ, θ, sont inférieurs en module, à un nombre fixe N, quand x, y, z sont inférieurs à r; si on forme les deux fonctions :

$$H = \frac{M}{1 - \frac{u+v+w}{R}} \qquad L = \frac{N}{1 - \frac{x+y+z}{r}} - N$$

dont la seconde est composée de manière à s'annuler avec x, y, z, ces deux fonctions seront majorantes la première par rapport aux coefficients $A, B, \ldots$, la seconde par rapport à λ, μ, θ. – Nous disons qu'une fonction F est majorante par rapport à une autre Φ dépendant de mêmes variables, lorsque l'on a, quels que soient les indices.

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}\right|_0 < \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} F}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots}\right)_0$$

4°. Remplaçons dans (4)(5) toutes les fonctions $A\,B\,C\ldots$ par H, λ, μ, θ par L; nous formerons un système :

$$(4') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = H\left[\frac{\partial(u+v+w)}{\partial x} + \frac{\partial(u+v+w)}{\partial y} + \frac{\partial(u+v+w)}{\partial z}\right]$$

$$(5') \qquad u_0 = v_0 = w_0 = L$$

De ce système on pourra déduire trois séries S' et on voit immédiatement que si ces séries sont convergentes dans des cercles de rayon ρ, il en sera de même à fortiori, des séries S. Tout revient donc à établir l'existence de ce rayon ρ pour les séries (S'). – Pour cela nous allons intégrer le système $(4')(5')$.

On a d'abord $u = v$, car la différence $u - v$ ne dépend pas de t et comme elle doit être nulle pour $t = 0$, elle est identiquement nulle; on a de même $u = w$; en d'autres termes les trois fonctions inconnues se réduisent à une seule $\underline{w}$ donnée par les conditions.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 3\frac{M}{1 - \frac{3w}{R}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$w_0 = \frac{N\,s}{r - s} \qquad (x+y+z = s)$$

Essayons une solution de la forme $w = P(s, t)$, P devra satisfaire aux équations :

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{9M}{1 - \frac{3P}{R}} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \qquad P(s, 0) = \frac{Ns}{r - s}$$

Or si nous posons :

$$\varphi = 9Mt + \left(1 - \frac{3P}{R}\right)s,$$

on voit immédiatement que la première des équations (6) peut s'écrire :

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Il faut donc que Q soit une fonction de P et l'on aura :

$$9Mt + \left(1 - \frac{3P}{R}\right)s = F(P)$$

Si on fait $t = 0$, on doit avoir simultanément :

$$P_0 = \frac{NS}{r - s} \qquad \left(1 - \frac{3P_0}{R}\right)s = F(P_0)$$

Eliminant s

$$F(P_0) = \left(1 - \frac{3P_0}{R}\right)\frac{rP_0}{N + P_0}$$

On aura donc en définitive pour déterminer P :

$$\left(1 - \frac{3P}{R}\right)\frac{rP}{N+P} = 9Mt + s\left(1 - \frac{3P}{R}\right)$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{3P}{R}\right)\left[(r-s)P - Ns\right] - 9Mt(N+P) = 0$$

Cette équation du 2e degré a une racine qui se réduit à $\frac{NS}{r-s}$ pour $t = 0$; cette racine s'annule d'ailleurs pour $t = 0$, $x = y = z = 0$; puisqu'alors $s = 0$ et que les deux racines de l'équation précédente sont distinctes, 0 et $\frac{R}{3}$, cette racine est holomorphe dans les environs des valeurs 0. – Elle est donc développable en série entière pour toutes les valeurs de s, t inférieures en module à un nombre déterminé 4ρ ; donc enfin le système (4')(5') admet une intégrale satisfaisant aux conditions de l'énoncé et holomorphe quand chacune des variables a un module $< \rho$.

Dès lors la série $\underline{S'}$ est convergente pour les valeurs considérées de x, y, z, t ; il en est de même a fortiori des séries $\underline{S}$ et le théorème de Cauchy est complètement démontré.

IV – Sur les équations différentielles du 1er ordre.

– De la proposition générale que nous venons d'établir, Mr Picard a déduit une démonstration très simple et très élégante d'un théorème fondamental concernant les équations différentielles du 1er ordre ; voici cette démonstration que nous avons dû ajourner jusqu'à présent.

Soit le système :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= f_1(z, u, u_2, \ldots\ldots u_n) \\ \frac{du_2}{dz} &= f_2(z, u, u_2, \ldots\ldots u_n) \\ \frac{du_n}{dz} &= f_n(z, u, u_1, \ldots\ldots u_n) \end{aligned}$$

Les f sont supposés holomorphes pour des valeurs de petit module de $z, u_1, u_2 \ldots u_n$. Supposons qu'on en connaisse une solution quelconque.

$$(8) \qquad u_1 = \lambda_1(z) \quad u_2 = \lambda_2(z) \quad u_n = \lambda_n(z) \qquad [\lambda_i(0) = 0]$$

c'est-à-dire que les fonctions λ sont supposées définies, continues et dérivables le long d'une ligne C aboutissant au point o dans le plan des z. Il s'agit d'établir que ces fonctions se raccordent le long de cette ligne (C) avec un système de fonctions holomorphes, système qui coïncidera **nécessairement** avec l'intégrale fournie par le théorème de Cauchy. (IIIe Partie, page 13.)

Pour le faire voir, considérons l'équation :

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + f_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdots\cdots + f_n \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0 ;$$

elle est exactement de la forme de celle que nous venons d'étudier. — Donnons-nous un système de fonctions

$$H_1 (u_1\, u_2 \ldots u_n), \qquad H_2 (u_1\, u_2 \ldots u_n), \ldots\ldots\ldots H_n (u_1\, u_2 \ldots u_n)$$

holomorphes, s'annulant avec les u et satisfaisant à la condition :

$$\left[\frac{\partial (H_1\, H_2 \ldots H_n)}{\partial (u_1\, u_2 \ldots u_n)}\right]_0 \neq 0 .$$

Il existera n solutions de l'équation (9), holomorphes et se réduisant à $H_1, H_2, \ldots H_n$ respectivement, pour $z = 0$. Soient :

$$F_1 (z, u_1\, u_2 \ldots u_n), \quad F_2 (z, u_1\, u_2 \ldots u_n) \ldots\ldots F_n (z, u_1\, u_2 \ldots u_n),$$

ces solutions. Si nous substituons dans F_i les λ aux $\underline{u}$, nous aurons des fonctions φ_i de z et l'on aura le long de (C) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = \frac{\partial F_i}{\partial z} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \cdots\cdots + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{dz}$$

ou, encore, puisque les λ vérifient le système (7) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = \frac{\partial F_i}{\partial z} + f_1 \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_1} + \cdots\cdots + f_n \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_n} .$$

ou enfin, puisque F_i vérifie l'équation (9) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = 0 \qquad \varphi_i = \text{const.}$$

Mais φ_i s'annule pour $z = 0$ d'après la construction des fonctions F_i. — Donc on a le long de (C)

$$(10) \qquad F_1 (z, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n) = 0, \qquad F_2 (z, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n) = 0, \qquad F_n (z, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n) = 0$$

Ces équations (10) ont leurs premiers membres holomorphes pour de petites valeurs de $z, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, et satisfont pour $z=0$ aux conditions :

$$F_i(0,0 \quad 0)=0 \qquad \left[\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)}\right] \neq 0$$

Donc elles définissent bien un système de fonctions holomorphes se raccordant avec les λ le long de la courbe (C). (Voir IIIe Partie - Page 7).

Quatorzième Leçon

Intégration des Équations du 1er ordre.

I – Équation linéaire — Une équation du premier ordre est de la forme :

$$f(z, x_1 x_2 \dots x_n, p_1 p_2 \dots p_n)=0$$

$x_1 x_2 \dots x_n$ étant des variables indépendantes, z une fonction de ces variables et p_i désignant la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x_i}$; intégrer une telle équation c'est ramener la recherche de ses solutions à un système d'équations différentielles ordinaires. Nous considérerons d'abord le cas où l'équation est linéaire par rapport aux dérivées, c'est à dire de la forme :

$$(1) \qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 \dots + P_n p_n = P$$

Dans ce cas, la réduction dont nous venons de parler résulte immédiatement de ce que nous avons vu dans la 8e Leçon (page 59).

En effet si nous désignons par :

$$F(z, x_1 x_2 \dots x_n)=0$$

une intégrale et que nous prenions pour inconnue la fonction F, qui dépend alors de $n+1$ variables nous aurons :

$$p_i = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

et l'équation (1) deviendra :

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + P \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

elle est de la même forme mais sans second membre ; or nous avons vu que si

l'on intègre le système :

$$(3) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P}$$

et qu'on résolve les intégrales par rapport aux n constantes arbitraires de sorte qu'on ait :

$$\lambda_1(x_1 x_2 \ldots x_n z) = C_1, \qquad \lambda_2(x_1 x_2 \ldots x_n z) = C_2, \ldots \qquad \lambda_n(x_1 x_2 \; x_n z) = C_n$$

l'intégrale générale de l'équation (2) sera une relation arbitraire entre $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Ainsi, pour avoir l'intégrale générale de l'équation (1), on formera l'intégrale générale du système (3) ; on établira une relation arbitraire entre les n constantes que contient cette intégrale et on éliminera toutes les constantes entre les n+1 équations dans lesquelles elles figureront.

Nous pouvons prendre pour constantes arbitraires les valeurs $\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \gamma$ que prennent $x_2 x_3 \ldots x_n, z$ pour une valeur donnée α_1 de x_1. Les intégrales sont alors de la forme :

$$(4) \qquad x_2 = \xi_2(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \gamma), \quad x_3 = \xi_3(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \gamma) \qquad x_n = \xi_n(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) \quad z = \xi(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \gamma)$$

Supposons que z doive se réduire pour $x_1 = \alpha_1$, à une fonction donnée $\varphi(x_2 x_3 \ldots x_n)$ des autres variables, la relation à établir entre les constantes sera alors :

$$(5) \qquad \gamma = \varphi(x_2 x_3 \ldots x_n)$$

L'élimination de $\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \gamma$ entre les relations (4) et (5) fournirait une intégrale de l'équation (1) et cette intégrale est précisément celle qui correspond au théorème général de Cauchy.

II – Applications

1° – Surfaces cylindriques – Si on définit une surface cylindrique comme celle dont la normale est parallèle à un plan fixe, l'équation aux dérivées partielles de cette surface est :

$$ap + bq = c$$

a, b, c étant trois constantes, p, q les dérivées de z par rapport à x et à y.

Cette équation est linéaire ; le système :

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$$

a pour intégrale générale :

$$cx - az = \text{const.} \qquad cy - bz = \text{const.}$$

l'équation générale des surfaces cylindriques est donc :

$$F(cx - az,\ cy - bz) = 0$$

2°. — Surfaces coniques — Cherchons les surfaces dont le plan tangent passe par un point fixe $x_0\, y_0\, z_0$; leur équation aux dérivées partielles sera :

$$z_0 - z = p(x_0 - x) + q\,(y_0 - y)$$

on est donc conduit à intégrer le système :

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}\ ;$$

il a pour intégrales :

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \text{const.} \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \text{const.}$$

l'intégrale générale s'obtiendra donc en écrivant une relation homogène quelconque entre les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

3°. — Surfaces de révolution. — Cherchons encore les surfaces dont la normale rencontre une droite fixe. Si la droite fixe a pour équations :

$$\frac{X - x_0}{a} = \frac{Y - y_0}{b} = \frac{Z - z_0}{c}$$

l'équation des surfaces considérées est :

$$p\left[b(z - z_0) - c\,(y - y_0)\right] + q\left[c\,(x - x_0) - a\,(z - z_0)\right] = a(y - y_0) - b(x - x_0)$$

Le système à intégrer est alors :

$$\frac{dx}{b(z - z_0) - c\,(y - y_0)} = \frac{dy}{c\,(x - x_0) - a\,(z - z_0)} = \frac{dz}{a\,(y - y_0) - b\,(x - x_0)}\ .$$

On en déduit les deux équations :

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0$$

qui s'intègrent immédiatement et donnent :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c\,(z - z_0) = \beta\ ,$$

α, β étant deux constantes arbitraires. On retrouve ainsi l'équation connue

des surfaces de révolution.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=F(ax+by+cz).$$

Remarque — Observons que ce procédé d'intégration fournit dans chaque cas un mode de génération de la surface trouvée ; les intégrales du système différentiel font connaître les équations de la génératrice.

4° — Théorème des fonctions homogènes — D'après le théorème d'Euler si z est homogène et de degré m par rapport aux variables $x_1\ x_2 \dots x_n$ on a la relation :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = mz$$

en intégrant cette équation, nous reconnaitrons sans peine que les fonctions homogènes jouissent seules de cette propriété. Le système à intégrer est en effet :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \qquad = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz}$$

il admet évidemment pour intégrale générale :

$$\frac{x_2}{x_1}=\alpha_2 \quad \frac{x_3}{x_1}=\alpha_3 \qquad \frac{x_n}{x_1}=\alpha_n \quad \frac{z}{x_1^m}=\alpha_1$$

$\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ étant des constantes arbitraires. On a donc pour la fonction z la plus générale répondant à la question :

$$z = x_1^m\ F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_1}\right)$$

III — Équations non linéaires du premier ordre

Soit maintenant l'équation générale :

$$(1) \qquad f(z, x_1\ x_2 \dots x_n, p_1\ p_2 \dots p_n)=0$$

où p_i désigne toujours la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x_i}$; nous représenterons par X_i les dérivées du premier membre $\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial f}{\partial p_j}$.

Une intégrale quelconque est une équation de la forme :

$$(2) \qquad z = F\ (x_1 x_2 \dots x_n)$$

telle que l'on ait identiquement :

$$f\left(F, x_1 x_2 \dots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=0$$

Mais on peut envisager la question à un point de vue plus large. Supposons qu'on se donne, sur une intégrale particulière, les valeurs de $x_1\ x_2 \dots x_n$; on en

déduira les valeurs correspondantes de $z, p_1 p_2 \dots p_n$; l'ensemble de ces $(2n+1)$ quantités x_i, z, p_j forme ce qu'on appelle un élément de l'intégrale ; l'intégrale est alors constituée par l'ensemble de $n+1$ fonctions simultanées $z, p_1 p_2 \dots p_n$ des variables $x_1 x_2 \dots x_n$, satisfaisant identiquement, d'abord à l'équation (1), et en outre aux n équations de condition :

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

Si maintenant nous faisons un changement de variables, nous pourrons définir l'intégrale de la manière suivante : une intégrale sera formée de $2n+1$ fonctions x_i, z, p_j de n variables indépendantes $t, t_1, t_2 \dots t_{n-1}$ vérifiant identiquement l'équation (1) et en outre l'équation aux différentielles totales :

$$(4) \qquad \delta z = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \dots + p_n \delta x_n$$

Cette définition est, comme nous le verrons plus loin plus générale que la première. Elle est due à M^r. Sophus Lie.

Ceci posé, partons d'un élément de l'intégrale ; en cet élément, les valeurs de x_i, z, p_j sont connues et il en est de même pour toute fonction donnée de ces quantités ; si on donne aux x des accroissements $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, la nécessité de rester sur l'intégrale imposera des accroissements déterminés à $z, p_1 p_2 \dots p_n$ la méthode que nous allons suivre (méthode des caractéristiques ou méthode de Monge) consiste à choisir les accroissements arbitraires $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ de telle sorte que les $n+1$ autres accroissements puissent s'en déduire par un calcul indépendant de l'intégrale considérée.

Il suffit pour cela, comme nous allons le voir, de donner aux x des accroissements proportionnels aux valeurs des fonctions $P_1 P_2 \dots P_n$; c'est à dire tels qu'on ait :

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \qquad = \frac{dx_n}{P_n}.$$

En effet, sur toute intégrale on a identiquement :

$$X_i + Z p_i + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} \qquad + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$X_i + Z p_i + P_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \qquad + P_n \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0$$

Si nous considérons en particulier le déplacement (5) cette identité donnera dt étant la valeur commune des rapports (5)

$$(X_i + Z p_i)\, dt + \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p_i}{\partial x_2} dx_2 \qquad + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx = 0$$

ou simplement :

$$(6) \qquad dp_i = -(X_i + Z p_i)\, dt$$

équation qui détermine $dp_1, dp_2 \ldots dp_n$; d'autre part on a évidemment :

$$(7) \qquad dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 \ldots + p_n\, dx_n = (P_1 p_1 + P_2 p_2 \ldots + P_n p_n)\, dt,$$

ce qui détermine dz. — En résumé, un système de variations simultanées de x_i, z, p_i, sera donné par les équations :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \frac{-dp_2}{X_2 + p_2 Z} \ldots = \frac{dz}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n} = dt$$

La suite d'éléments définie par ces relations est ce qu'on appelle une caractéristique. De ce que les équations (8) peuvent être obtenues à l'aide de la seule équation (1) et indépendamment de telle ou telle intégrale particulière, on conclut que deux intégrales qui ont en commun un élément, ont en commun tous les éléments dont la succession forme la caractéristique correspondante.

Comme d'ailleurs, par tout élément d'intégrale passe une caractéristique on voit qu'on est amené à la solution suivante : On cherchera la solution générale des équations (8) c'est à dire l'expression analytique de toutes les caractéristiques, cette expression contiendra, outre la variable t, $2n+1$ paramètres qui seront les valeurs de x_i, z, p_i pour $t = 0$. Il suffira pour avoir une intégrale, d'associer convenablement ces caractéristiques, c'est à dire d'établir, entre les paramètres, des relations telles que les deux conditions imposées à toute intégrale soient vérifiées. Pour plus de simplicité, nous considérerons d'abord le cas de deux variables indépendantes.

IV — Cas de deux variables indépendantes — Intégration —

Soit l'équation :

$$(9) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0$$

et posons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z \quad \frac{\partial f}{\partial p} = P \quad \frac{\partial f}{\partial q} = Q$$

Les équations (8) sont alors :

$$(10) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} = dt$$

Toute intégrale est représentée par une surface, si nous admettons, comme nous l'avons fait, que $x\, y\, z, p, q$ doivent dépendre en dernier lieu de deux variables indépendantes ; un élément est ici l'ensemble formé par un point de

la surface intégrale et le plan tangent en ce point; l'égalité des deux premiers rapports (10) définit les caractéristiques comme une famille de courbes tracées sur la surface intégrale; dire que les variations de z, p, q sont déterminées par celles de x, y, indépendamment de toute intégrale particulière, c'est-à-dire que deux surfaces intégrales qui se touchent en un point se raccordent tout le long de la caractéristique passant par ce point.

Toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques; la solution la plus générale du système (10) est de la forme:

$$(11) \qquad x = \varphi(x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0\, t) \qquad y = \psi(x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0\, t) \qquad q = \lambda(x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0\, t)$$

l'indice 0 indiquant la valeur prise pour $t = 0$; si nous prenons pour $x_0, y_0, \dots q_0$ cinq fonctions d'une autre variable $\underline{u}$; x, y, z seront des fonctions de 2 variables et les caractéristiques se trouveront associées de manière à former une surface; reste à chercher comment doivent être choisies ces fonctions $x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0$ pour que cette surface soit une intégrale. Il y a pour cela deux conditions à remplir.

En premier lieu, les valeurs (11) doivent annuler identiquement f; or on a:

$$df = X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq.$$

Si on suppose le déplacement effectué suivant la caractéristique, il vient, à cause des équations 10:

$$df = dt\left[PX + Q + QY + Z(Pp + Qq) - (X + pZ)P - (Y + qZ)Q\right] = 0$$

Donc f ne dépend pas de t; pour qu'il soit nul, quelque soit t, il faut et il suffit qu'on ait:

$$(12) \qquad f(x_0\, y_0\, z_0, p_0\, q_0) = 0$$

et moyennant cette condition, f sera identiquement nul sur toute la surface, puisqu'il sera nul le long de chacune des caractéristiques.

En second lieu, on doit avoir:

$$\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$$

cette relation est évidente si on se déplace suivant la caractéristique; désignons alors par δ un déplacement quelconque, en dehors de cette courbe, d représentant le déplacement suivant la caractéristique; si nous posons:

$$V = \delta z - p\,\delta x - q\,\delta y$$

nous aurons, en observant qu'on peut intervertir d et δ:

$$dV = \delta dz - p\,\delta dx - q\,\delta . dy - \delta x\, dp - \delta y\, dq,$$

ou:
$$dV = dt\left[\delta(Pp+Qq) - p\,\delta P - q\,\delta Q + \delta x\,(X+pZ) + \delta y\,(Y+qZ)\right]$$
$$dV = dt\left[P\delta p + Q\delta q + X\delta x + Y\delta y + Z(p\delta x + q\delta y)\right] = dt\left[\delta f - ZV\right]$$

Mais $\delta f = 0$, f étant identiquement nul; on aura donc :

$$dV = -ZV\,dt \qquad V = V_0\, e^{-\int_0^t Z dt}$$

L'intégrale ayant évidemment une valeur finie cette condition revient à:

$$\text{(13)} \qquad \delta z_0 - p_0\,\delta x_0 - q_0\,\delta y_0 = 0 .$$

En résumé, on devra remplacer dans les équations (11) $x_0\ y_0\ z_0\ p_0\ q_0$ par des fonctions de u vérifiant identiquement les équations (12) et (13); si les équations (11) donnent alors, par élimination de t, u, p, q une seule relation entre x, y, z, elles définiront une intégrale au sens ordinaire du mot; si l'élimination conduisait à deux relations entre x, y, z, elles définiraient une courbe qui serait une intégrale dans le sens de Lie.

Solution de Cauchy — Si on désigne par φ une fonction arbitraire on satisfera à la condition (13) en posant α étant une constante:

$$x_0 = \alpha \qquad y_0 = u \qquad z_0 = \varphi(u) \qquad q_0 = \varphi'(u)$$

z se réduira alors à $\varphi(y)$ pour $x = \alpha$.

Remarque — Nous avons admis que, pour les valeurs initiales $x_0\ y_0\ z_0\ p_0\ q_0$, les dénominateurs des équations (10) étaient finis ; c'est la condition nécessaire pour que ces équations admettent une solution holomorphe dans le voisinage des valeurs initiales ; d'autre part nous devons supposer aussi que ces valeurs $x_0\ y_0 - q_0$ n'annulent pas en même temps les quatre fonctions,

$$P, \quad Q, \quad X+pZ, \quad Y+qZ,$$

Car s'il en était ainsi la seule solution de ces équations, serait:

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad p = p_0 \quad q = q_0 ,$$

elle ne dépendrait plus de la variable t, contrairement à ce que nous avons supposé. On voit qu'en somme nous avons laissé de côté les intégrales qui satisferaient à la fois aux équations :

$$\text{(14)} \qquad f = 0 \quad X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0 \quad P = 0 \quad Q = 0 .$$

Il peut exister de telles solutions, qu'on appelle singulières ; on pourra toujours s'assurer, par une simple vérification, si elles existent ou non.

Par exemple dans le cas de l'équation $pq = z$, les équations (14) se réduisent

à trois :
$$z = pq \qquad p = 0 \qquad q = 0$$
elles sont compatibles et donnent la solution singulière $z = 0$.

Prenons encore l'équation des surfaces dont la normale est constante

$$z\,(1+p^2+q^2) = l^2$$

Les équations (14) sont alors :

$$z^2\,(1+p^2+q^2) = l^2 \qquad pz^2 = 0 \qquad qz^2 = 0 \qquad pz(1+p^2+q^2) = 0 \qquad qz(1+p^2+q$$

elles admettent la solution :

$$p = 0 \qquad q = 0 \qquad z = \pm l$$

c'est bien une solution ; les autres solutions sont données par des surfaces canaux qui toutes sont tangentes aux deux plans qui forment la solution singulière.

V. Exemples. 1° – Prenons d'abord l'équation simple :

$$pq - z = 0$$

Equation des caractéristiques :
$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

On obtient aisément les intégrales :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \sqrt{\frac{z}{z_0}} \qquad x - x_0 = q - q_0 \qquad y - y_0 = p - p_0$$

On aurait ici :
$$p = p_0\, c^t.$$
Si on fait :
$$x = \alpha \qquad y_0 = u \qquad z_0 = \varphi(u) \qquad q_0 = \varphi'(u) \qquad p_0 = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}.$$
l'intégrale cherchée s'obtiendra en éliminant u entre les équations :

$$x - \alpha = \left[\sqrt{\frac{z}{\varphi(u)}} - 1\right] \varphi'(u)$$

$$y = u = \left[\sqrt{\frac{z}{\varphi(u)}} - 1.\right] \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}$$

Ainsi que nous l'avons vu plus haut il y a une solution singulière z

2° – L'équation des surfaces dont le plan tangent satisfait à une condition donnée, ne dépendant pas du point de contact, est :

$$z - px - qy = F\,(p, q)\,.$$

Elle correspond à l'équation de Clairaut. Les équations des caractéristiques sont ici :

$$\frac{dx}{x+\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{y+\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{px+qy+p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

On a d'abord les deux intégrales $p=p_0$, $q=q_0$: si on pose :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 = A \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 = B \quad F(p_0 q_0) = C$$

on aura les autres intégrales sous la forme :

(15) $$\frac{x+A}{x_0+A} = \frac{y+B}{y_0+B} = \frac{z-C+p_0A+q_0B}{z_0-C+p_0A+qB} = e^t$$

On devra d'abord écrire :

(16) $$z-p_0x-q_0y=F(p_0q_0)$$

On peut d'abord éliminer t, z_0 ce qui donne :

(17) $$z-p_0x-q_0y=F(p_0q_0),$$

équation à laquelle nous joindrons :

(18) $$xy_0-yx_0+Bx-Ay=0$$

D'ailleurs la condition d'intégrabilité peut s'écrire :

(19) $$(x_0+A)\,\delta p_0+(y_0+B)\,\partial q_0=0.$$

Nous la vérifierons en posant :

$$\delta p_0=0 \qquad \delta q_0=0$$

Si donc α, β sont deux constantes, nous aurons une classe d'intégrales donnée par les plans :

$$z=\alpha x+\beta y+F(\alpha,\beta).$$

En second lieu on peut encore poser :

$$p_0=u \qquad q_0=\varphi(u) \qquad x_0+A=-\varphi'(u)(y_0+B),$$

l'Intégrale sera donnée par les deux équations simultanées :

$$z=ux+y\varphi(u)+F(u,\varphi)$$

$$x+y\varphi'(u)+\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\varphi'(u)=0$$

c'est l'enveloppe d'une famille de plans.

En dehors de ces solutions, il reste à voir, si l'on a une solution singulière. Elle sera alors définie par les trois équations simultanées

$$x + \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad y + \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad z = px + qy + F(p, q).$$

C'est d'ailleurs bien une solution, car si on différentie totalement la dernière en tenant compte des deux premières on a:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

En résumé la solution comprend:

1°. — L'ensemble de tous les plans P satisfaisant à la condition donnée.

2°. — L'enveloppe du plan mobile obtenu en établissant une relation arbitraire entre les deux paramètres dont dépendent les plans P.

3°. — L'enveloppe de toutes les solutions précédentes ; c'est la solution singulière.

3°. — Comme dernier exemple, soit encore:

$$pq = xy$$

$$P = q \qquad Q = p \qquad X = -y \qquad Y = -x \qquad Z = 0$$

Ici il n'y a évidemment pas de solution singulière. Les caractéristiques ont pour équations:

$$p\,dx = q\,dy = \frac{dz}{2} = x\,dp = y\,dq = dt.$$

On en déduit en intégrant et éliminant t :

$$p^2 - p_0^2 = (z - z_0)\ \frac{p_0}{x_0}$$

$$q^2 - q_0^2 = (z - z_0)\ \frac{q_0}{y_0}$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \frac{y}{y_0} = \frac{q}{q_0}$$

Si on pose:
$$x_0 = \alpha \qquad y_0 = u, \qquad q_0 = \varphi'(u) \qquad z_0 = \varphi(u) \qquad p = \frac{\alpha u}{\varphi'(u)},$$

On obtient la solution par l'ensemble des deux équations simultanées:

$$z - \varphi = \frac{\alpha^2 u}{\varphi'(u)}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right) = u\,\varphi'(u)\left(\frac{y^2}{u^2} - 1\right)$$

On peut écrire ces deux équations sous la forme:

$$(z-\varphi)^2 = (x^2-\alpha^2)\ (y^2-u^2)$$

$$\varphi'(z-\varphi) = u\ (x^2-\alpha^2)$$

on voit qu'alors la seconde est la dérivée de la première par rapport à u; chaque intégrale particulière est donc l'enveloppe d'une famille de surfaces du 4e ordre.

VI_Cas de plusieurs variables._Revenons à l'équation:

$$(1) \qquad f(z, x_1\, x_2 \ldots x_n\ \ p_1\, p_2 \ldots p_n) = 0$$

Supposons qu'on ait intégré les équations des caractéristiques:

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n} = \frac{-dp_j}{X_j + p_j Z} = dt$$

Soient α_i, γ, β_j les valeurs de x_i, z, p_j pour $t=0$; nous supposons que pour ces valeurs initiales, aucun des dénominateurs n'est infini et qu'ils ne sont pas tous nuls; les intégrales sont alors de la forme:

$$(20) \qquad x_i = \varphi_i\ (t, \alpha, \beta, \gamma) \qquad z = \psi(t, \alpha, \beta, \gamma) \qquad p_j = \varpi_j\ (t, \alpha, \beta, \gamma)$$

les fonctions φ, ψ, ϖ étant holomorphes.

Les calculs et les raisonnements étant exactement les mêmes que dans le cas de deux variables, nous nous contenterons d'énoncer les résultats. Pour avoir la solution générale de l'équation (1), on devra dans les formules (20) substituer à α, β, γ, $2n+1$ fonctions de $n-1$ variables $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_{n-1}$, ces fonctions étant choisies de telle sorte qu'on ait identiquement:

$$(21) \quad \begin{cases} f(\gamma, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n,\ \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n) = 0 \\ \delta\gamma = \beta_1\, \delta\alpha_1 + \beta_2\, \delta\alpha_2 + \ldots + \beta_n\, \delta\alpha_n \end{cases}$$

Les α, γ, β étant choisies de cette manière les formules (20) donneront x_i, z, p_j en fonction des n variables $t, t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$; ce sera la solution cherchée; si l'élimination des t conduit à une relation unique entre z, x_1, $x_2 \ldots x_n$ on aura une intégrale dans le sens ordinaire du mot; si on a plusieurs relations distinctes entre z et les x, ce sera une intégrale, au sens plus étendu de Mr Lie.

Il y aura plusieurs manières de satisfaire à la seconde des conditions (21); on le pourra en particulier en faisant:

$$\alpha_1 = \text{const.} \qquad \gamma = \varphi(\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n) \qquad \beta_j = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j}$$

Cette solution est celle à laquelle conduit une autre méthode d'intégration,

due à Cauchy (pour l'exposé de la méthode de Cauchy, voir le cours autographié de Mr Picard, page 393.)

On peut d'ailleurs, voir aisément quelle est la manière générale de vérifier la seconde des équations (21) [Voir Darboux - Solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, page 140], les $n+1$ fonctions z, α_i devant dépendre de $n+1$ variables seulement, on devra établir entre elles, un nombre au moins égal à deux, de relations d'ailleurs arbitraires. Supposons par exemple qu'on introduise cinq relations de cette nature, et que ces relations puissent se résoudre par rapport à $z, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$, on aura alors:

(22) $z = \zeta(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n) \qquad \alpha_1 = \lambda_1(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n) \cdots\cdots \alpha_4 = \lambda_4(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n)$

Si on transporte ces valeurs dans la seconde des relations (25) elle deviendra linéaire et homogène par rapport à $\delta\alpha_5, \delta\alpha_6 \cdots \delta\alpha_n$, égalant à 0 chacun des coefficients de ces variations, on aura $n-4$ nouvelles relations, qui jointes aux équations (22) détermineront les $n+1$ fonctions z, α_i; la solution donnée plus haut correspond au cas où on prend deux relations arbitraires dont l'une est $\alpha_1 = \text{const}$.

Seizième Leçon.

Intégrales des équations aux dérivées partielles du 1er ordre. Equations Canoniques.

---

1 - Intégrale complète — On nomme intégrale complète de l'équation

(1) $$f\,(z, x_1\, x_2 \cdots x_n, p_1 p_2 \cdots p_n) = 0$$

une intégrale de la forme:

(2) $$F\,(z, x_1\, x_2 \cdots x_n, a_1\, a_2 \cdots a_n) = 0$$

où $a_1\, a_2 \cdots a_n$ sont des constantes distinctes, c'est à dire telles qu'on en puisse disposer de manière à donner à $p_1, p_2 \cdots p_n$ des valeurs arbitraires pour des valeurs données des variables indépendantes $x_1\, x_2 \cdots x_n$; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'exprime évidemment par l'inégalité:

(3) $$\left[\frac{D\,(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_n)}{D\,(a_1\, a_2 \cdots a_n)}\right]_0 \neq 0 \qquad \left[\varphi_i = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right]$$

Le théorème général de Cauchy met en évidence l'existence d'une infinité d'intégrales complètes. Si $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ sont les valeurs initiales attribuées aux $\underline{x}$, on peut toujours en effet trouver une intégrale qui pour $x_1 = \alpha_1$, se réduise à une fonction $\varphi(x, x_2 \cdots x_n)$ et rien n'empêche d'introduire dans cette fonction φ qui est quelconque, n constantes arbitraires, telles que la condition (3) soit vérifiée pour $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3 \cdots x_n = \alpha_n$.

On peut obtenir une intégrale complète par l'intégration des caractéristiques. Supposons en effet qu'on ait intégré les équations des caractéristiques en prenant pour valeurs initiales des x, les constantes données $\alpha, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, pour z et p_j, $n+1$ constantes liées par la seule relation:

$$f(\gamma, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \;\; \beta, \beta_2 \cdots \beta_n) = 0$$

en sorte que n de ces constantes soient arbitraires; il est évident que la condition:

$$\delta z = p\delta x_1 + p_1 \delta x_1 \cdots\cdots + p_n \delta x_n$$

sera vérifiée d'elle-même, pour les valeurs initiales; on aura donc bien une intégrale de l'équation (1), contenant $\underline{n}$ constantes arbitraires qui seront précisément si l'on veut, les valeurs initiales des p. Ce sera donc bien une intégrale complète.

I — Intégrales générales — Intégrale singulière. — Lagrange a montré que lorsqu'on connaît une intégrale complète on peut en déduire toutes les autres intégrales de l'équation (1) en appliquant la méthode de la variation des arbitraires.

En effet dire que (2) définit une intégrale c'est dire que si on élimine les a entre cette relation (2) et les suivantes

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots n)$$

on obtient comme résultat l'identité (1).. Or cette élimination se fera exactement de même et donnera ce même résultat si au lieu des $\underline{a}$ on met des fonctions de $x, x_2 \cdots x_n$ telles que les équations (4) conservent la même forme.

Il suffira, pour cela que les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ tirées de l'équation:

$$(5) \qquad F\;(z, x, x_2 \cdots x_n, \lambda, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0$$

où $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ sont les fonctions en question, aient la même forme que si ces λ étaient constantes, c'est à dire que l'on ait:

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

L'équation (5) donnera donc, une intégrale, pourvu que les λ vérifient les relations (6). Or il y a plusieurs manières de les vérifier; on peut poser d'abord:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} = 0$$

On obtient ainsi une intégrale que Lagrange a nommée intégrale singulière; elle résulte de l'élimination des constantes entre l'intégrale complète et ses n dérivées par rapport à ces constantes.

Si on laisse de côté cette intégrale, les équations (5) ne pourront avoir lieu que si le déterminant:

$$\frac{D\,(\lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_n)}{D\,(x_1\,x_2 \cdots x_n)}$$

est égal à 0. Cela exige qu'il y ait entre les λ une ou plusieurs relations identiques, ou en d'autres termes que quelques uns d'entre eux soient des fonctions, d'ailleurs arbitraires, de tous les autres. Supposons, pour envisager immédiatement le cas le plus général que l'on pose:

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \psi_1\,(\lambda_{K+1}\,\lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \\ \lambda_2 = \psi_2\,(\lambda_{K+1}\,\lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \\ \vdots \\ \lambda_K = \psi_K\,(\lambda_{K+1}\,\lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \end{cases}$$

Si nous substituons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_K$ dans les équations (5) elles deviennent, en posant:

$$F\,(z\,x_1\,x_2\,\cdots x_n\,,\psi_1\,\psi_2\,\cdots\,\psi_K\,,\lambda_{K+1}\cdots\lambda_n) = \mathcal{F}\,(z\,x_1\,x_2\cdots x_n\,\lambda_{K+1}\,\lambda_{K+2}\cdots\lambda_n),$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+1}}\,\frac{\partial \lambda_{K+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+2}}\,\frac{\partial \lambda_{K+2}}{\partial x_i} \cdots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_n}\,\frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0$$

et comme il n'y a plus aucune relation identique entre $\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n$, elles ne peuvent avoir lieu que si l'on a:

$$(8) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+1}} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+2}} = 0\,, \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_n} = 0\,.$$

Les équations (7) et (8) définissent un système de λ répondant à la question; en les substituant dans l'équation (6) on obtient une intégrale appelée par Lagrange intégrale générale.

En résumé, partant de l'intégrale complète, on y considèrera les constantes comme des paramètres indépendants; l'enveloppe de l'intégrale complète fournira la solution singulière. On supposera ensuite que K de ces paramètres soient des fonctions arbitraires des autres; l'enveloppe de

l'intégrale complète qui ne dépendra plus que de $n-k$ paramètres fournira l'intégrale générale

III — Le procédé que nous venons d'indiquer permet d'obtenir à l'aide d'une intégrale complète, une infinité d'autres intégrales. Il est facile de faire voir qu'il les donne toutes. Supposons en effet, pour plus de simplicité, l'intégrale complète mise sous la forme :

$$z = F(x_1 x_2 \cdots x_n, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

on aura identiquement :

$$f\left(F, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

et les $\underline{\alpha}$ disparaitront d'eux-mêmes de cette expression ; elle sera donc identiquement nulle si on y remplace les $\underline{\alpha}$ par des fonctions quelconques des x. Soit, d'autre part, une intégrale quelconque de l'équation (1)

$$z = \varphi(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Si nous écrivons les équations :

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdots \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

elles définissent les α comme fonctions implicites des x, et cela en raison de l'inégalité (3). Soient $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ les fonctions ainsi définies. Si nous les substituons dans f, nous aurons identiquement, d'après ce que nous avons dit plus haut :

$$(10) \qquad f\left(\mathcal{F}, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

$\mathcal{F}$ étant égal à :

$$\mathcal{F} = F(x_1 x_2 \cdots x_n, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

Mais d'autre part, φ étant une intégrale, on a aussi :

$$(11) \qquad f\left(\varphi, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

D'où l'on conclut, en comparant les identités (10) et (11) :

$$(12) \qquad \mathcal{F} = \varphi = F(x_1 x_2 \cdots x_n, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

Ainsi l'on reproduit φ en substituant aux constantes, dans F, les λ définis par les équations (9), Tout revient alors à faire voir que ces λ satisfont aux équations (6) du paragraphe précédent. Or, si nous dérivons l'identité (12) par rapport à x_i, en tenant compte des équations (9), nous

avons immédiatement, en supprimant $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ dans les deux membres:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0$$

le théorème est donc démontré.

IV_ Intégrale singulière déduite de l'équation donnée_ Reprenons l'intégrale complète, dans laquelle nous supposons qu'on ait remplacé les $\underline{a}$ par les fonctions $\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Si nous éliminons ces λ entre les équations:

$$(13) \qquad F\,(z, x_1\, x_2 \cdots x_n, \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0$$

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0\,,$$

nous devons retrouver l'équation donnée $f=0$. Celle-ci est donc identique à (13) pourvu que dans cette dernière on considère les λ comme des fonctions de x_i, z, p_j, données par les relations (14). On aura donc, en désignant par μ un facteur de proportionnalité:

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu\, p_i \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_K}\left(\frac{\partial \lambda_K}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \lambda_K}{\partial z}\right)$$

$$\mu \frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_K} \cdot \frac{\partial \lambda_K}{\partial p_i}$$

Si l'on tient compte des équations (14) et qu'on se place en outre dans le cas de la solution singulière où les $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ sont nuls, on voit qu'on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

La solution de Lagrange ne diffère donc pas de celle que nous avions définie dans la dernière leçon. Cette solution n'existe donc pas toujours, et si elle existe, elle se distingue essentiellement des intégrales complètes ou générales.

Dans le cas des trois variables x, y, z, cela est bien évident: l'intégrale singulière étant l'enveloppe de toutes les autres ne coïncide avec aucune d'elles d'autre part son existence est soumise aux restrictions qui interviennent dans la théorie des enveloppes.

V_ Applications_ Certaines méthodes d'intégration consistent à chercher une intégrale complète, d'où l'on puisse déduire ensuite toutes les autres. Dans toutes ces méthodes on est toujours amené à intégrer, complètement ou en partie, le système

des caractéristiques. — Nous ne donnerons pas ces méthodes d'intégration. — Mais nous remarquerons que, dans bien des cas, en géométrie surtout, on peut apercevoir, sans calcul, a priori une intégrale complète. — 1°. — Soit à chercher (page 122) les surfaces dont la normale a une longueur constante R. — Il est visible que toutes les sphères dont le rayon est R et dont le centre est dans le plan des xy, répondent à la question : l'équation

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2$$

admet donc comme intégrale complète :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$$

On aura l'intégrale singulière en adjoignant à cette équation les deux suivantes :

$$x-a=0 \qquad y-b=0.$$

Cette intégrale singulière sera donc le système de plans $z=\pm R$; quant à l'intégrale générale, ce sera une surface canal de rayon R ayant pour axe une courbe arbitraire tracée dans le plan XoY.

2°. — L'équation analogue à celle de Clairaut :

$$z=p_1x_1+p_2x_2\cdots+p_nx_n+\varphi(p_1p_2\cdots p_n)$$

admet l'intégrale complète évidente :

$$z=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\cdots+\alpha_nx_n+\varphi(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$$

Toutes les autres intégrales s'en déduisent par des différentiations.

3°. — L'équation :

$$z^{n-1}=p_1p_2\cdots p_n$$

admet l'intégrale évidente :

$$z=(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

on obtient toutes les autres par des différentiations. — L'intégrale singulière est ici $z=0$.

VI — Équations canoniques — Théorème de Jacobi — Les caractéristiques de l'équation du premier ordre, sont données par le système d'équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt}=P_i \qquad \frac{dp_i}{dt}=-X_i-p_iZ \qquad \frac{dz}{dt}=P_1p_1+P_2p_2+\cdots+P_np_n \quad (i=1,2,3\ldots n)$$

Ce sont des équations différentielles d'une nature toute particulière,

puisque leurs seconds membres sont formés à l'aide des dérivées partielles d'une seule fonction. On peut leur donner une forme plus élégante.

Prenons pour inconnue, non pas la fonction z, mais une fonction $V(z, x_1 x_2 \dots x_n)$ qui, égalée à une constante, donnerait une intégrale de l'équation aux dérivées partielles. La substitution s'opère immédiatement à l'aide des formules :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Supposons faite cette substitution et résolvons par rapport à $\frac{\partial V}{\partial z}$, nous aurons alors:

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} + H\left(z, x_1, x_2 \dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

équation qui contiendra $n+1$ variables indépendantes, mais dans laquelle la fonction inconnue ne figure plus que par ses dérivées.

Formons les équations des caractéristiques, en représentant toujours par p_i la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, nous aurons :

$$\frac{\partial z}{dt} = 1 \qquad \frac{d\frac{\partial V}{\partial z}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \qquad \frac{\partial x_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

La première de ces équations montre que la variable z et la variable auxiliaire t ne diffèrent que par une constante ; on peut donc prendre $z = t$; la seconde équation peut être supprimée, la valeur de la fonction $\frac{\partial V}{\partial z}$ étant donnée par l'équation (2) elle-même.

En résumé l'équation :

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x_1 x_2 \dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

a pour caractéristiques :

$$(4) \qquad \frac{\partial x_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$

Sous cette forme les équations (4) où figurent n couples de variables x, p se correspondent deux à deux, constituant un système d'équations canoniques.

Théorème de Jacobi. — Quand on connaît l'intégrale générale du système (4) on peut en déduire toutes les solutions de l'équation (3). — Réciproquement, si on connaît une intégrale complète de l'équation (3) on peut obtenir, pour ainsi dire sans calcul, l'intégrale générale du système (4).

Cela résulte du théorème suivant.

Théorème. – Soit

$$(5) \qquad V = F\,(t, x_1 x_2 \cdots x_n, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

une intégrale complète de l'équation (3); l'intégrale générale du système (4) sera donnée par les équations:

$$(6) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = b_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

$b_1, b_2 \ldots b_n$ étant de nouvelles constantes arbitraires.

Les équations (6) contiennent en effet $2n$ constantes arbitraires; on peut disposer de $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ de telle sorte que les p_i prennent pour $t = 0$ telles valeurs que l'on voudra; cela fait on pourra évidemment disposer des b_i de manière à donner aux x_i des valeurs initiales quelconques. D'après cela, il suffira pour établir le théorème de Jacobi, de vérifier que les valeurs de x_i, p_i, tirées de ces équations (6) satisfont aux équations (4).

Or la fonction F satisfait identiquement, et quels que soient les α, à l'équation (3); on a donc:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(t, x_1 x_2 \cdots x_n \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \equiv 0$$

Différentions par rapport à l'un quelconque des x et à l'un quelconque des α, nous aurons $2n$ identités de la forme:

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_n}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x} \equiv 0$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_2}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_n}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial \alpha} \equiv 0$$

Différentions alors par rapport à t, les équations (6) en y remplaçant dans le second membre, les p par leurs valeurs tirées de ces mêmes équations (6) nous aurons:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_2} \frac{dx^2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{dt} = 0$$

$$(10) \qquad \frac{dp_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Le déterminant des équations (9) n'est pas nul, puisque F est une intégrale complète; mais alors si l'on compare ce système (9) au système (8) on a immédiatement:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_i}}$$

ou, en tenant compte de la première équation (6) :

$$(11) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

La première moitié du système d'équations canoniques est donc vérifiée ; Les autres équations se vérifient également sans difficulté. En effet l'une des identités (7) peut maintenant s'écrire :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_2} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_2} + \qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} = 0 .$$

et comme l'équation (10) peut aussi s'écrire, à cause des relations (11) :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} = 0$$

on en déduit immédiatement :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Le théorème est donc complètement démontré.

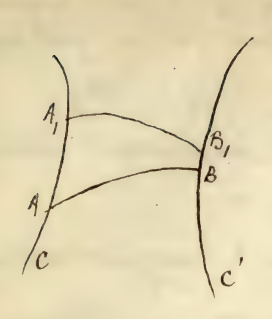
Nous ne développerons pas les conséquences de cette proposition qui trouve surtout son application dans les questions de dynamique. Nous rencontrerons les systèmes canoniques, dans une question importante du calcul des variations.

Calcul des Variations.

Dix-septième Leçon.

Variation d'une fonction. – Variation d'une intégrale définie.

I – Dans l'analyse des fonctions continues on étudie comment varient les fonctions quand on attribue aux variables des accroissements infiniment petits. Dans le calcul des variations, on cherche ce que deviennent certaines fonctions quand d'autres fonctions, dont elles dépendent, subissent des altérations de forme infiniment petites. Supposons par exemple, deux courbes fixes C, C' ; on peut aller de l'une de ces courbes à l'autre par une infinité de chemins ; Soit AB l'un de ces chemins ; un second chemin A_1B_1 sera dit infiniment voisin du premier, si chacun des points qui composent A_1B_1 est infiniment voisin de l'un des points qui composent AB, et réciproquement. –



Remplacer AB, par $A_1 B_1$, c'est faire subir à AB une déformation infiniment petite ; si $y = \varphi(x)$ est l'équation de AB projetée sur XOY, cette fonction φ sera remplacée par une autre φ_1 de forme infiniment voisine, quand on passera de AB à $A_1 B_1$.

Si la courbe AB est assujettie à rester sur une surface donnée, le passage de AB à $A_1 B_1$ donnera lieu à l'altération d'une seule fonction ; si au contraire AB est tout à fait libre, il y aura altération de deux fonctions.. Dans tous les cas l'accroissement d'une quantité définie par cette courbe, telle que, par exemple, la longueur de l'arc AB, sera une variation, puisque cet accroissement résulte de l'altération de certaines fonctions.

On peut se faire une idée plus précise des variations et ramener, de la manière suivante, leur calcul à celui de différentielles ; nous supposerons toujours dans ce qui suit, que les fonctions considérées ne dépendent que d'une seule variable.

Soit une fonction $f(x)$ qui se modifie d'une manière continue, $f_1(x)$, $f_2(x)$ deux états différents de cette fonction ; on peut construire une fonction $F(x, \alpha)$, continue par rapport aux deux variables x et α et qui, pour $\alpha = \alpha_1$ coïncide avec $f_1(x)$, pour $\alpha = \alpha_2$ avec $f_2(x)$. Il suffit en effet de poser :

$$(1) \qquad F(x,\alpha) = \frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\, f_1(x) + \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\, f_2(x) + (\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\, H(x.\alpha)$$

H étant une fonction arbitraire de x, α, continue pour $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$. L'équation (1) donne même la forme la plus générale de la fonction F répondant à la question.

On voit de plus, et cette remarque nous sera utile quand nous aurons à calculer la variation d'une intégrale définie, que l'équation (1) étant résoluble par rapport à son dernier terme, on pourra toujours choisir H de telle sorte que pour deux valeurs données de x, $x_1 x_2$, F se réduise à deux fonctions de α, $\varphi_1(\alpha)$; $\varphi_2(\alpha)$.

Ceci posé, si nous développons la différence $f_2(x) - f_1(x)$ nous aurons :

$$f_2(x) - f_1(x) = (\alpha_2-\alpha_1)\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} \cdots + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \cdots$$

Si nous supposons les deux fonctions infiniment voisines l'une de l'autre, il nous faudra supposer que $\alpha_2 - \alpha_1$ est infiniment petit ; dans ces conditions la quantité :

$$(\alpha_2-\alpha_1)^n \left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=\alpha_1},$$

est ce que l'on appelle la variation d'ordre n de la fonction $f_1(x)$; on la représente par $\delta^n f_1(x)$ et on a alors pour l'accroissement complet d'une fonction quelconque

$$\Delta y = \delta y + \frac{1}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\delta^3 y + \cdots + \frac{1}{1.2\cdots n}\cdot\delta^n y + \cdots \qquad (2)$$

D'après cela la première variation, qu'on appelle simplement la variation, sera donnée par la formule :
$$\delta y = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot d\alpha$$

C'est comme on le voit une différentielle relative à l'accroissement $d\alpha$ de $\underline{\alpha}$.

II. Interversion des caractéristiques d, δ — Si nous différentions l'équation (1) par rapport à x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\, f_1'(x) + \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\, f_2'(x) + (\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\frac{\partial H}{\partial x}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ se réduit donc à $f_1'(x)$ pour $\alpha = \alpha_1$, et à $f_2'(x)$ pour $\alpha=\alpha_2$. Donc, par cela même que la fonction f sera comprise dans $F(x,\alpha)$, sa dérivée sera comprise dans la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$, et plus généralement $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sera comprise pour ses valeurs extrêmes dans la fonction :
$$\frac{\partial^n F(x,\alpha)}{\partial x^n}$$

Pour parler avec plus de précision, si $F(x,\alpha)$ se raccorde avec la fonction $f(x)$ pour $\alpha=\alpha_1$ et $\alpha=\alpha_2$, sa $n^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x, se raccordera avec $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour les mêmes valeurs α_1 et α_2.

On a alors d'après ce qui précède :
$$d^n(\partial^p y) = dx^n \left[\frac{\partial^{n+1} F(x,\alpha)}{\partial x^n \partial \alpha^p}\right]_{\alpha=\alpha_1} (\alpha_2-\alpha_1)^p$$

d'où l'on déduit :
$$d^n\,\delta^p y = \delta^p\, d^n\, y \qquad (3)$$

L'égalité (3) exprime qu'on peut intervertir les caractéristiques d et δ.

Toutes les règles du calcul des dérivées s'appliquent naturellement ici ; en particulier, supposons une fonction de la forme :
$$V(x, y, y' y'', z\, z' z'' z''', u\, u' u' u''' u^{IV})$$

sa variation première sera donnée par :
$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\,\delta y'' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial u^{(IV)}}\cdot\delta(u^{IV})$$

il y a avantage à ne laisser subsister, dans cette expression, que les variations δy, δz, δu et leurs dérivées ; cela se fait sans difficulté en vertu du

théorème précédent, on a par exemple:

$$\delta y'' = \frac{\delta d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}.$$

La variation δV pourra donc s'écrire:

$$(4) \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{d \delta y}{dx} + \frac{\partial V}{\partial y''} . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial u^{(IV)}} \frac{d^4 . \delta u}{dx^4}.$$

Dans ce calcul, x est supposée la variable indépendante; c'est donc une fonction de forme invariable et sa variation δx est nulle.

III — Changement de la variable indépendante — Supposons que dans la question proposée, figurent certaines fonctions susceptibles de variation, savoir:

$$(5) \qquad y = f(x) \qquad z = \varphi(x) \qquad u = \psi(x).$$

Si on prend au lieu de x, une autre variable t, les équations (4) se trouveront remplacées par quatre équations telles que:

$$(6) \qquad x = \lambda(t) \qquad y = \mu(t) \qquad z = \nu(t) \qquad u = \theta(t).$$

Si les fonctions f, φ, ψ passent d'un état f_1, φ_1, ψ_1 à un autre $f_2 . \varphi_2 . \psi_2$, les 4 fonctions $\lambda, \mu, \nu, \theta$, passeront de l'état $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \theta_1$ à un autre $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \theta_2$. Or on peut former quatre fonctions: $L(t,\alpha)$, $M(t,\alpha)$, $N(t,\alpha)$, $P(t,\alpha)$, qui se réduisent respectivement à $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \theta_1$, pour $\alpha = \alpha_1$ à $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \theta_2$, pour $\alpha = \alpha_2$. Si nous posons alors:

$$(7) \qquad x = L(t,\alpha) \qquad y = M(t,\alpha) \qquad z = N(t,\alpha) \qquad u = P(t,\alpha).$$

ce système (7) comprendra les deux systèmes:

$$y = f_1(x) \qquad z = \varphi_1(x) \qquad u = \psi_1(x)$$

$$y = f_2(x) \qquad z = \varphi_2(x) \qquad u = \psi_2(x)$$

D'après une remarque faite plus haut, on pourra choisir la fonction L de telle sorte que pour deux valeurs données t, t_1 de la nouvelle variable; L se réduise à deux fonctions données $\xi_1(\alpha)$ $\xi_2(\alpha)$ de la variable α.

En supposant faite cette substitution, la variation de x n'est plus nulle, on a en général:

$$\delta^n x = (\alpha_2 - \alpha_1)^n \left(\frac{\partial^n L}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha = \alpha_1}$$

Remarque — On n'a jamais à faire, d'une façon effective, la substitution

dont nous venons de parler : il suffit pour les fonctions qui dépendent du calcul des variations, de savoir que ces fonctions L, M, N, P existent, ainsi que nous l'avons démontré, sans qu'il soit nécessaire de les former.

IV – Intersection des caractéristiques $\delta \int$ ——— Considérons maintenant l'intégrale définie :

$$J = \int_a^b V(x, y\,y'\,y'', z\,z'\,z''\,z''', u\,u', u''', u^{IV})\,dx$$

Cette intégrale change quand on modifie les fonctions $y, z, u, \ldots$ V est une fonction déterminée de x, des fonctions $y, z, u, \ldots$ et de leurs dérivées, nous nous proposons de calculer la variation δJ.

Remarquons d'abord que les limites de l'intégrale peuvent être variables c'est ce qui arriverait dans l'exemple que nous avons donné au début de cette leçon la longueur de l'arc AB est donnée par :

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,.\,dx\,.$$

et si les points AB décrivent les courbes c, c', a, b prennent l'une et l'autre des valeurs qui changent avec la courbe mobile ; dans le passage de AB à A_1B_1, on doit donc considérer a, b, comme des fonctions de α, et par suite leur attribuer des variations.

En second lieu il pourra se faire que V dépende, en outre, des valeurs a et b et aussi des valeurs correspondantes des fonctions y, z, et de leurs dérivées. Cela arrive par exemple si, dans l'exemple que nous venons de rappeler, on étudie le temps employé par un mobile à parcourir la courbe AB sous l'influence de la pesanteur. On aurait dans ce cas :

$$J = \sqrt{\frac{m}{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{z_0 - z}\,dx\,.$$

m étant la masse du mobile et z_0 le z du point de départ A

Nous devons donc supposer en général, que les limites sont variables et que les valeurs de x, y, z, $y', z', \ldots\ldots$, prises à ces limites, figurent dans la fonction V.

Les limites a, b changeant avec les fonctions inconnues, passeront des valeurs $a_1\,b_1$ à des valeurs $a_2\,b_2$ quand y, z, u, passeront des valeurs $y_1\,z_1\,u_1$ aux valeurs $y_2\,z_2\,u_2$. On peut toujours effectuer le passage de a à a_1 et de b à b_1 en ne faisant varier qu'un seul paramètre α. Nous considérerons a comme une fonction $\varphi(\alpha)$ et b comme une autre fonction $\psi(\alpha)$. Cela fait,

nous pourrons constituer les fonctions L, M, N, P . qui figurent dans les formules (7) de telle sorte que pour deux valeurs données t_0, t_1 de t, on ait :

$$L(t_0, \alpha) = \varphi(\alpha) . \qquad L(t_1 \alpha) = \psi(\alpha).$$

La fonction V deviendra une fonction

$$U\left(\alpha, t, LMNP, \frac{\partial L}{\partial t} \ldots\ldots \varphi(\alpha), \psi(\alpha) \ldots\right]$$

et l'intégrale sera :

$$J \int_{t_0}^{t_1} U \frac{\partial L}{\partial t} . dt.$$

Mais ici, les limites sont des constantes, nous pouvons différentier par rapport à α et nous aurons :

$$\delta J = d\alpha \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(U \frac{\partial L}{\partial t}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial . (U \frac{\partial L}{\partial t})}{\partial \alpha} d\alpha\right] dt$$

ou encore :

$$\delta J \int_{t_0}^{t} \left[\delta \left(U \frac{\partial L}{\partial t}\right)\right] dt = \int_{t_0} . \delta \left(U \frac{\partial L}{\partial t} dt\right)$$

Si maintenant nous revenons à la variable x,

$$\delta J = \int_a^b \delta (V dx) .$$

On peut donc intervertir les caractéristiques $\delta, \int$.

V — Variation d'une intégrale définie — Il existe plusieurs procédés pour mettre la variation δJ sous la forme que nous avons en vue. Le plus commode dans la pratique est le suivant ; c'est du reste celui dont s'est servi exclusivement Lagrange, l'inventeur de la méthode des variations.

Rendons libre la variable indépendante en nous servant des identités :

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y\, dx - dy\, d^2x}{dx^3}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \ldots\ldots$$

$V dx$ se transformera en une fonction ne contenant plus que des différentielles et on aura alors :

$$\delta (V dx) = X_0 \delta x + X_1 \delta dx + X_2 \delta . d^2x + \ldots\ldots$$
$$Y_0 \delta y + Y_1 \delta . \delta y + Y_2 \delta . d^2y + \ldots\ldots$$

+ des termes contenant les variations des valeurs aux limites.

Considérons dans δJ le terme :

$$\int Y_p . \delta . d^p y = \int Y_p . d^p(\delta y)$$

Nous pourrons intégrer par parties ce qui nous donnera en dehors de l'intégrale :

$$Y_p\, d^{p-1}\delta y - dY_p\, d^{p-2}\delta y + d^2 Y_p\, d^{p-3}\delta y \; \ldots\ldots \pm d^{p-1}Y_p . \delta y \mp \int d^p Y_p . \delta y .$$

La partie extraite de l'intégrale pourra s'écrire en intervertissant d et δ ; les termes qui la composent seront donc linéaires par rapport aux variations premières de y, dy ..... $d^{p-1}y$.

Les termes qui dépendent dans $\delta(V\,dx)$, des valeurs aux limites donneront sans aucun calcul des termes de cette même forme. Si nous désignons par les indices 0, 1, la limite inférieure et la limite supérieure, nous aurons des termes de la forme :

$$\int A_q . \delta . d^q z_0 = \delta . d^q z_0 \int A_q$$

Puisque $\delta d^q z_0$ est indépendant de la variable d'Intégration. _ En résumé désignons par Γ l'ensemble des termes extraits au moyen de l'intégration par parties par Λ l'ensemble des termes qui dépendent des variations des valeurs aux limites nous arrivons à un résultat de la forme :

$$(8) \quad \delta J = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Lambda + \int X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + U\delta u .$$

X, Y, Z, U sont des fonctions différentielles, homogènes et du premier degré par rapport aux indices de différentiation ; la partie extérieure :

$$R = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Lambda$$

est composée linéairement avec les variations des valeurs aux limites et de leurs différentielles.

VI _ Exemples

_ Soit d'abord l'intégrale :

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, .dx .$$

qui représente, dans l'exemple que nous avons choisi, la longueur de l'arc AB. Si nous cessons de spécifier la variable indépendante,

$$V\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

d'où :

$$\delta\,(V\,dx) = \frac{dx\,.\,d\delta x + dy\,.\,d.\delta y + dz\,.\,d.\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Si α, β, γ sont des cosinus directeurs de la tangente

$$\delta\,(V\,dx) = \alpha\, d.\delta x + \beta\, d.\delta y + \gamma\, d.\delta z ,$$

et en intégrant par parties :

$$\int \delta (V\,dx) = \alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z - \int d\alpha\,\delta x + d\beta\,.\,\delta y + d\gamma\,.\,\delta z$$

et enfin :

(10) $$\delta J = \alpha_1\,\delta x_1 + \beta_1\,\delta y_1 + \gamma_1\,\delta z_1 - \alpha_0\,\delta x_0 - \beta_0\,\delta y_0 - \gamma_0\,\delta z_0 - \int_{t_0}^{t_1} (d\alpha\,.\,\delta x + d\beta\,.\,\delta y + d\gamma\,.\,\delta z).$$

2° _ Soit encore l'intégrale qui figure dans l'expression du temps employé par un corps pesant à parcourir l'arc AB.

$$J = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z_0 - z}}\,dx.$$

Nous aurons ici :

$$V\,dx = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z_0 - z}}$$

$$\delta (V\,dx) = \frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}\;\frac{dx\,.\,d\,\delta x + dy\,\delta dy + dz\,\delta . dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{1}{2}\;\frac{\delta z - \delta z_0}{(z_0 - z)^{\frac{3}{2}}}\;\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Intégrons par parties en introduisant les cosinus α, β, γ, comme dans l'exemple précédent :

$$\int \delta (V\,dx) = \frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}\,(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z) - \frac{1}{2}\,\delta z_0 \int \frac{ds}{(z_0 - z)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int \left[\delta z \left(\frac{ds}{2(z_0 - z)^{\frac{3}{2}}} - d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0 - z}}\right)\right) - \delta x\,.\,d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0 - z}}\right) - \delta y\; d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0 - z}}\right)\right]$$

et enfin :

$$\delta J = \left[\frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}\,(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\,\delta z_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{(z_0 - z)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta z \left(\frac{ds}{2(z - z_0)^{\frac{3}{2}}} - d\,\frac{\gamma}{\sqrt{z_0 - z}}\right) - \delta x\; d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0 - z}}\right) - \delta y \left(d\,\frac{\beta}{\sqrt{z_0 - z}}\right)\right]$$

Il est clair qu'on eût pu simplifier le calcul en prenant, au lieu de l'axe des z, l'axe des x suivant la verticale.

Dix-huitième Leçon.

Questions de maximum et de minimum qui dépendent du Calcul des Variations.

1. Condition de maximum ou de minimum. — Reprenons l'intégrale:

$$J = \int_a^b V\,dx.$$

Parmi les systèmes de fonctions $y, z, u,$ $y_1 z_1 u_1 \ldots y_0 z_0 u_0$ (les indices 1, 0, indiquant toujours les valeurs prises aux limites supérieure et inférieure), quel est celui pour lequel cette intégrale est maxima ou minima ? Euler a, le premier, donné une méthode pour résoudre les problèmes de ce genre, dans le cas où il n'y a qu'une fonction inconnue et où les limites sont fixes. En d'autres termes, le problème résolu par Euler consiste à déterminer parmi toutes les courbes planes passant par deux points donnés, celle pour laquelle une intégrale donnée est maxima ou minima. C'est Lagrange qui a donné la solution complète du problème général énoncé plus haut, en créant la méthode des variations qui trouve d'ailleurs son application dans d'autres théories importantes d'analyse et de mécanique.

Soit S le système de fonctions pour lequel il y a maximum ou minimum, S' un autre système quelconque infiniment voisin de S. On peut toujours par une interpolation du genre de celles que nous avons définies dans la dernière leçon, construire une suite de systèmes intermédiaires, dépendant d'un paramètre α et permettant de passer de S à S'. Parmi tous les systèmes possibles envisageons exclusivement ceux qui forment cette suite continue. Parmi ces systèmes particuliers S est celui qui donne à J une valeur maxima ou minima et comme J ne dépend, quand on passe de l'un à l'autre, que du paramètre α on doit avoir $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$.

Cette condition doit être vérifiée quel que soit le système S' et par suite δJ doit être nul, pour tous les systèmes qu'on peut construire par interpolation. C'est dans ce sens que nous dirons que la variation de l'intégrale doit être nulle pour le système cherché S.

Ainsi pour qu'il y ait maximum ou minimum il faut que la variation de l'intégrale soit nulle.

Cette condition n'est pas suffisante ; comme dans les questions

élémentaires de maximum, il faudrait examiner ce que deviennent, pour ce système S qui annule δJ, la variation seconde $\delta^2 J$ et quelquefois même les variations d'ordre supérieur. Nous laisserons de côté cette discussion qui est d'ailleurs inutile dans les cas très fréquents où l'on sait d'avance, par la nature même de la question à quoi s'en tenir sur l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

II _ Conditions pour que la variation de l'Intégrale soit nulle.

Nous avons vu comment on peut mettre la variation δJ sous la forme :

$$(1) \qquad \delta J = R + \int [M\delta x + N\delta y + P\delta z + Q\delta u].$$

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'on conserve $\underline{x}$ comme variable indépendante ; on a alors $\delta x = 0$ et le premier terme disparaît sous le signe $\int$. Mais les limites $x_0 = a$, $x_1 = b$ continuent à être variables. Si y figurait initialement dans V par ses dérivées jusqu'à l'ordre $\underline{n}$ inclusivement, z, $\underline{u}$ par leurs dérivées d'ordre p, q on voit que R sera composé linéairement avec :

$$\begin{array}{llllll} \delta x_0 & \delta y_0 & \delta y'_0 & \cdots\cdots \delta y_0^{(n-1)} \cdots & & \delta u_0^{(q-1)} \\ \delta x_1 & \delta y_1 & \delta y'_1 & \delta y_1^{(n-1)} \cdots & & \delta u_1^{(q-1)} \end{array}$$

D'autre part, comme à chaque intégration par parties l'ordre différentiel sous le $\int$ croît d'une unité, N, P, Q contiendront y, z, u aux ordres suivants:

N	$2n$	$n+p$	$n+q$
P	$n+p$	$2p$	$p+q$
Q	$q+n$	$q+p$	$2q$

Ceci posé, prenant pour point de départ le système de fonctions et de valeurs aux limites qui annule δJ, laissons fixe tout ce qui se rapporte à :

$$z, u, z_0\, u_0, z_1\, u_1,$$

et à leurs dérivées. Altérons seulement ce qui se rapporte à y, y_0, y_1 ; α étant un paramètre variable remplaçons y par

$$y + \alpha\theta^2 N$$

θ étant une fonction de x qui s'annule aux deux limites ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées ; dans ces conditions on aura, en différentiant par rapport à α et faisant $\alpha = 0$:

$$\delta y = \alpha.\theta^2 N \qquad \delta y_0 = 0 \qquad \delta y_1 = 0 \quad \cdots\cdots \delta y_0^{(n-1)} = 0 \qquad \delta y_0^{(n-1)} = 0$$

d'ailleurs toutes les autres variations qui figurent dans δJ sont également nulles et l'on a alors:

$$\delta J = d\alpha \int \theta^2 N^2 = 0$$

d'où $N = 0$.

On verrait de même que les fonctions cherchées doivent annuler P et Q, donc ces fonctions doivent satisfaire aux équations:

$$(2) \qquad N = 0 \qquad P = 0 \qquad Q = 0 .$$

C'est d'après ce que nous avons vu plus haut, un système d'équations différentielles d'ordre $2n + 2p + 2q = 2K$, et si on le suppose intégré sa solution générale contient $2K$ constantes arbitraires, $C_1\, C_2 \ldots C_{2K}$.

Si maintenant on revient à la condition $\delta J = 0$, en tenant compte des équations (2) elle se réduit à:

$$(3) \qquad R = 0$$

et les conditions (2), (3), que nous venons de démontrer nécessaires sont évidemment suffisantes.

III — Détermination des fonctions inconnues — Le nombre total des variations aux limites est $2K + 2$ (à cause de δx_0 et δx_1). Ceci posé, les fonctions sous le signe $\int$ étant toujours supposées indépendantes, supposons d'abord qu'il n'y ait aucune condition imposée aux limites, en sorte que les variations qui figurent dans R n'aient aucune dépendance entre elles. L'identité (3) ne pourra être satisfaite que si on égale séparément à 0 le coefficient de chacune de ces variations. On obtiendra ainsi $2K + 2$ équations de condition permettant de déterminer:

$$x_0\ , x_1\ , \quad C_1\ C_2 \ \ldots\ C_{2K}$$

Mais en général les variations aux limites ne seront pas complètement arbitraires. S'il s'agit par exemple d'une courbe à déterminer par une condition de maximum, ses extrémités pourront être ou fixes, ou bien assujetties l'une ou l'autre, ou toutes deux, à rester sur des courbes ou des surfaces données; ou bien encore on pourra imposer à la courbe, en ses extrémités certaines conditions d'orientation ou de courbure etc ... Supposons d'une manière générale que les variations qui figurent dans R soit liées par p relations

$$(4) \qquad H_1 = 0 \qquad H_2 = 0 \qquad H_i = 0$$

dans lesquelles il ne pourra figurer de dérivées d'ordre supérieur à:

$$n-1\ , p-1,\ q-1.$$

Si nous différentions ces équations (2) suivant la caractéristique δ, nous aurons i relations linéaires entre les variations aux limites; nous pourrons exprimer

i de ces variations, en fonction des autres, substituer leurs valeurs dans R, qui n'en contiendra plus que $2K+2-i$ d'indépendantes. Annulant les coefficients de celles-ci, nous aurons $2K+2-i$ relations qui, jointes aux conditions (4), permettront encore de déterminer x_0 x_1 C_1 C_2 .... C_{2K}.

Remarque — On peut évidemment, et cela sera souvent plus commode, annuler tous les coefficients de:

$$R+\mu_1\ \delta H_1+\mu_2\ \delta H_2 \qquad +\mu_i\ \delta H_i$$

où $\mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_i$ sont des indéterminées. On aura ainsi $2K+2$ équations, qui, jointes aux équations (4) détermineront $x_0\ x_1$, $C_1\ C_2$. C_{2K} $\mu_1\ \mu_2 \cdot\cdot \mu_i$.

V — Cas où les fonctions inconnues sont liées par des équations données — Nous avons supposé que les fonctions inconnues y, z, u sous le signe $\int$, étaient absolument indépendantes : mais cela n'a pas toujours lieu; s'il s'agit par exemple de déterminer une courbe, cette courbe pourra être assujettie à demeurer sur une surface donnée à rencontrer normalement une suite de surfaces, ou à toute autre condition analogue.

Supposons d'une manière générale que dans V figurent des fonctions $y, z\ u$ .... astreintes à vérifier constamment les relations:

$$(5) \qquad \varphi_1=0 \quad \varphi_2=0 \qquad \varphi_e=0$$

Ces relations sont différentielles ; on peut même concevoir, et nous le supposerons pour plus de généralité qu'elles contiennent d'autres fonctions η, ξ. C'est ce qui arriverait par exemple, si on on voulait faire un changement de variables. Observons enfin que ces conditions (5) introduiront avec elles des conditions aux limites, puisqu'elles doivent être vérifiées jusqu'à ces limites inclusivement ; on devra même si y, z, u ... y figurent par des dérivées d'ordres moindres que $n-1$, $p-1$, $q-1$ les différentier un certain nombre de fois par rapport à x et faire ensuite $x=x_0$, $x=x_1$ dans les résultats. Les conditions aux limites se trouveront alors complétées.

Ceci posé, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_e$ des fonctions de x, que nous laisserons pour le moment indéterminées, et que nous supposerons n'être pas susceptibles de variation. Considérons l'intégrale:

$$J'=\int_a^b (V+\lambda_1\ \varphi_1+\lambda_2\ \varphi_2 \qquad +\lambda_e\ \varphi_e)\,dx=\int_a^b V'dx$$

il est clair que pour tout système de fonctions satisfaisant identiquement aux équations (5) on a $\delta J=\delta J'$; nous devons donc chercher à annuler identiquement $\delta J'$.

Dans V', figurent toutes les fonctions $y, z, u, \cdots \eta\ \xi, \cdots$ en nombre $\underline{h}$;

d'après les relations (5) l de ces fonctions peuvent être considérées comme fonctions des $h-l$ autres. Si nous calculons δJ à l'aide d'intégrations par parties en faisant nuls $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$ .... $\delta\lambda_p$, nous aurons un résultat de la forme

$$\delta J' = R' + \int N'\delta y + P'\delta z + Q'\delta u + \dots + \int \delta\eta + T\delta\xi + \dots$$

Disposons des indéterminées λ de manière à annuler sous le signe $\int$, tous les coefficients des δ qui correspondent aux l fonctions que nous considérons comme dépendant des $h-l$ autres. Il ne restera plus, sous le signe, que des variations absolument indépendantes, et pour qu'on ait identiquement $\delta J' = 0$, il nous faudra annuler tous les coefficients restants. En définitive nous aurons donc :

$$(6) \qquad N' = 0 \quad P' = 0 \quad Q' = 0 \; \dots \; S = 0 \; \dots \; T = 0 \; \dots$$

et par suite :

$$(7) \qquad R' \equiv 0$$

On opérera sur le système (6), (7), pour la détermination des constantes arbitraires, exactement comme dans le § précédent. — Il y aura ici à déterminer toutes les fonctions :

$$y\; z\; u, \dots \eta, \xi, \dots \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_l$$

VI — Cas où une intégrale donnée doit rester constante

Supposons qu'on ait à déterminer les conditions de maximum ou de minimum de :

$$J = \int_a^b V\,dx$$

une autre intégrale :

$$I = \int_a^b U\,dx$$

devant avoir une valeur donnée C ; c'est ce qu'on appelle un maximum ou un minimum relatif. Ce cas se ramène très simplement au précédent ; introduisons en effet une fonction η, satisfaisant aux conditions :

$$(8) \qquad \eta' = U \qquad \eta_0 = 0 \qquad \eta_1 = C$$

qui équivalent évidemment à la condition imposée ; les équations (8) remplaceront les équations (5) de tout à l'heure, et nous aurons :

$$J' = \int_a^b \left[V + \lambda\,(\eta' - U) \right] dx$$

d'où :

$$\delta J' = \delta J + \int \lambda\,\delta\left[(\eta' - U)\,dx\right]$$

Si nous calculons seulement le coefficient de $\delta\eta$ sous le signe, nous voyons qu'il est égal à $-\lambda'$. Nous poserons donc $\lambda = \text{const}$. Mais alors J' se simplifie.

$$J' = \int_a^b (V - \lambda U)\, dx + \lambda (\eta)_0^{\prime} = \lambda c + \int_a^b (V - \lambda U)\, dx$$

et on a:

$$\delta J' = \delta \int_a^b (V - \lambda U)\, dx = \delta J$$

En résumé on voit qu'on devra traiter le problème comme une question de maximum absolu, mais en remplaçant V par $V + \lambda U$, λ étant une constante indéterminée.

VII. Forme des équations différentielles — Tous les cas se ramènent à celui où les fonctions sous le signe sont indépendantes ; nous avons vu que les équations différentielles obtenues forment alors un système d'ordre :

$$2n + 2p + 2q = 2K,$$

réductible par conséquent à un système de $2K$ équations du 1er ordre. Jacobi a démontré que ce système final peut toujours être ramené à la forme canonique ; bien que la démonstration ne présente pas de difficulté dans le cas général nous le donnerons pour plus de simplicité, dans le cas seulement où $n = p \; q = 1$.

Soit alors, pour plus de symétrie :

$$J = \int V(t, x_1, x_2 \dots x_n, x_1', x_2' \dots x_n')\, dx$$

t étant la variable indépendante, $x_1\ x_2 \dots x_n$ les fonctions inconnues ; dans δJ on aura, sous le signe une somme de termes de la forme :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial x'} \delta x' \right) dx$$

et après l'intégration par parties ce terme sera remplacé par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \delta x - \frac{d \frac{\partial V}{\partial x'}}{dt} . \delta x$$

En sorte que les équations cherchées seront ici :

$$(9) \qquad \frac{d \frac{\partial V}{\partial x_1'}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \qquad \frac{d \frac{\partial V}{\partial x_2'}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_2} \qquad \frac{d \frac{\partial V}{\partial x_n'}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

Ce système est du second ordre ; nous le ramènerons au premier en faisant un changement de variables : posons :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i'} = p_i ,$$

substituons aux variables $x_i\ x_i'$, les variables $x_i\ p_i$ et considérons la

fonction :

$$H = \frac{\partial V}{\partial x'_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x'_2} x'_2 \ldots + \frac{\partial V}{\partial x'_n} - V \left(x_1 x_2 \ldots x'_1 x'_2 \ldots x'_n \right)$$

le 1er membre étant supposé exprimé en fonction de t, x_i p_i ; nous aurons symboliquement, en différentiant sans mettre d'indices, et en laissant t consta[nt]

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p} dp = \frac{\partial V}{\partial x'} dx' + x' dp - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial x'} dx'$$

D'où :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial x} \qquad x' \frac{\partial H}{\partial p}$$

Le système (9) se trouve ainsi remplacé par le suivant :

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

qui est sous la forme canonique. On pourra dès lors trouver avantage à rem-placer s'il y a lieu, l'intégration de ce système par la recherche d'une soluti[on] complète d'une équation aux dérivées partielles.

Dix-Neuvième Leçon.

Applications du calcul des Variations.

Nous appliquerons pour terminer, à quelques exemples, la méthode des varia[tions]. Nous avons vu qu'on peut toujours changer de variables de telle sorte que les limites de l'intégrale soient constantes. Il y a souvent avantage au point de vue de la symétrie, à supposer que ce changement a été fait, sans qu'il soit pour cela nécessaire de spécifier la nouvelle variable.

1. **Ligne minima entre deux points.** – Soient M_0 M_1 les deux points donn[és]. On a ici :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

t étant la variable indépendante. Nous avons calculé (page 140) la variation de cett[e] intégrale.

$$\delta J = (\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z)_0^1 - \int d\alpha\, \delta x + d\beta\, \delta y + d\gamma\, \delta z.$$

La ligne cherchée n'étant assujettie à aucune condition, nous aurons en annulant tous les termes sous le signe $\int$:

$$d\alpha = 0 \qquad d\beta = 0 \qquad d\gamma = 0$$

Ces équations sont du second ordre ; elles s'intègrent immédiatement et donnent :

$$(1) \qquad x = at + A \qquad y = bt + B \qquad z = ct + C.$$

a, b, c, $A B C$, étant six constantes arbitraires. La ligne cherchée est donc une droite. Nous déterminerons les constantes à l'aide des conditions aux limites ; aucun des deux points $M_0 M_1$ ne peut être absolument libre, le problème n'aurait aucun sens.

1°. Supposons fixes les deux extrémités : R est nul de lui-même en écrivant que les équations sont satisfaites pour M_0 et pour M_1, en faisant par exemple $t_0 = 0$ $t_1 = 1$, nous aurons :

$$A = x_0 \qquad B = y_0 \qquad C = z_0$$
$$a = x_1 - x_0 \qquad b = y_1 - y_0 \qquad c = z_1 - z_0$$

La solution correspond évidemment à un minimum ; on le voit à priori.

2°. Si l'extrémité M_1 est assujettie à rester sur une surface S, en sorte qu'on ait :

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 = 0$$

on aura :

$$R = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\left[\left(\beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\delta y_1 + \gamma\left(\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\delta z_1\right] - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0.$$

δy_1, δz_1 étant maintenant arbitraires, on aura d'abord les conditions :

$$\frac{\alpha_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\beta_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{\gamma_1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

La droite devra donc être normale à la surface S. Ici et dans les cas analogues, il serait absolument nécessaire, pour savoir s'il y a réellement maximum ou minimum de recourir à $\delta^2 J$ ou de faire une discussion géométrique

3°. Si M_1 doit rester sur une courbe donnée C, on aura :

$$f(x, y, z_1) = 0 \qquad \varphi(x, y, z_1) = 0$$

$$R = \left(\alpha_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)\delta x_1 + \left(\beta_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\gamma_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\right)\delta z_1 - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0$$

λ et μ étant deux indéterminées ; on devra alors écrire :

$$\alpha_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \qquad \beta_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0 \qquad \gamma_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0$$

d'où l'on conclut que la droite doit être normale à C.

En résumé si les extrémités sont astreintes à décrire des trajectoires données, la solution cherchée sera fournie par une normale commune à ces deux trajectoires; il y aura en général plusieurs droites, dont les unes donneront un minimum, les autres un maximum. La discussion présentera ordinairement de grandes difficultés.

11_ Lignes géodésiques d'une surface _ Nous avons supposé que la courbe était absolument libre; supposons maintenant qu'elle doive appartenir à une surface donnée :

$$F(x, y, z) = 0$$

Nous aurons maintenant l'intégrale :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \lambda F(x, y, z)\, dt$$

d'où on déduit facilement :

$$\delta J = (\alpha\, \delta x + \beta\, \delta y + \gamma\, \delta z)_0^1 - \int_{t_0}^{t_1} \left(d\alpha - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} dt\right) \delta x + \left(d\beta - \frac{\partial f}{\partial y} dt\right) \delta y + \left(d\gamma - \frac{\partial f}{\partial z} dt\right) \delta z$$

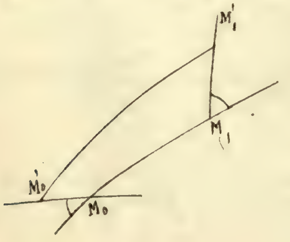
et les équations de condition sont :

$$\frac{d\alpha}{\frac{df}{\partial x}} = \frac{d\beta}{\frac{df}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{\frac{df}{\partial z}} = \lambda\, dt .$$

Donc le plan osculateur de la ligne cherchée doit être partout normal à la surface donnée. _ Cette propriété caractérise les lignes géodésiques de la surface donnée; les équations (2) sont du second ordre; leurs intégrales contiennent 6 constantes arbitraires; on les déterminerait, comme nous l'avons fait tout à l'heure, à l'aide des conditions aux limites, en ayant soin d'introduire les deux suivantes :

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

On peut d'ailleurs interpréter aisément, et d'une manière très générale, la condition $R = 0$. En effet dans le cas d'une ligne géodésique, l'intégrale qui figure dans δJ s'annule et on a simplement, $\underline{l}$ étant la longueur du segment $M_0 M_1$:



$$\delta l = \alpha_1\, dx_1 + \beta_1\, dy_1 + \gamma\, dz_1 - \alpha_0\, dx_0 - \beta_0\, dy_0 - \gamma_0\, dz_0$$

Si on passe du segment géodésique $M_0 M_1$ à un autre $M'_0 M'_1$ infiniment voisin, ceci peut s'écrire :

$$M'_0 M'_1 - M_0 M_1 = M_0 M'_0 \cos M_0 + M_1 M'_1 \cos M_1 ,$$

formule identique à celle que donne, dans un plan,

la variation d'un segment rectiligne. Il est alors très aisé d'étendre à une surface quelconque certaines théories importantes de géométrie plane : courbure géodésique, cercles géodésiques, développées, courbes parallèles, etc ....).

III. Brachystochrône. Supposons qu'un mobile soumis à la seule action de la pesanteur soit astreint à rester sur une courbe allant de M_0 à M_1 ; que doit être cette courbe pour que le temps du trajet soit un minimum.

Si nous supposons que cette courbe ne soit assujettie à aucune condition il est évident a priori qu'il y a bien un minimum. L'intégrale J est ici :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{z_0 - z}\, dx$$

Nous avons calculé (page) sa variation :

$$(3) \quad \begin{cases} \delta J = \left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\, \delta x + \dfrac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\, \delta y + \dfrac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\, \delta z \right)_0^1 - \dfrac{1}{2} \delta z_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \dfrac{ds}{(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} \\ + \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \left(\dfrac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} - d\dfrac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}} \right) \delta z - d\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) \delta x - d\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\right) \delta y \end{cases}$$

Les trois équations de condition sont :

$$d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right) = \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}}$$

D'après les deux premières le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou $\frac{dy}{dx}$ est constant ; la courbe est donc située dans un plan vertical. Si nous prenons ce plan pour plan des zx, nous aurons à intégrer :

$$(4) \qquad d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right) = \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} \qquad\qquad d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0$$

ou encore :

$$(5) \qquad 2\, d\gamma\, (z_0 - z) = ds - \gamma\, dz \qquad\qquad \alpha = C\sqrt{z_0-z}$$

Soient φ l'angle de la tangente avec Ox ; ces équations peuvent s'écrire :

$$(6) \qquad 2(z_0-z)\, d\varphi = ds \cos\varphi \qquad\qquad c^2 dx = (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Mais si on appelle N la normale limitée à l'horizontale menée par M_0 on a évidemment :

$$z_0 - z = N\cos\varphi,$$

et la condition précédente montre que le rayon de courbure est double de cette normale ; la courbe est donc une cycloïde ayant pour base l'horizontale du point de départ. Le plan de cette cycloïde est déterminé par le point M_1 et la verticale de M_0 ; quant à la seconde des équations (6) elle s'intègre sans difficulté avec introduction d'une nouvelle constante arbitraire. Il y a en tout quatre constantes ; si les points M_0, M_1 sont fixes, on pourra déterminer ces constantes en écrivant que la cycloïde passe par les deux points $M_0\, M_1$.

La condition $R = 0$ s'interprète sans difficulté dans le cas général, on a en effet, d'après l'équation (3) :

$$R = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0 - z}} \delta x + \frac{\gamma}{\sqrt{z_0 - z}} \delta z \right)_0^1 - \frac{\delta z_0}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}} \frac{1}{(z_0 - z)}$$

ou, en tenant compte des relations (5) :

$$R = C\,(\delta x_1 - \delta x_0) + C \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \delta z_1 - C \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \delta z_0$$

Soient ψ_1, ψ_0 les inclinaisons sur ox des courbes sur lesquelles doivent rester M_1, M_0 ; soient aussi φ_1, φ_0 les angles sous lesquels cette même direction est coupée par la cycloïde aux points M_1, M_0, en sorte qu'on ait :

$$\delta x_1 = \delta s_1 \cos\psi_1 \qquad \delta x_0 = \delta s_0 \cos\psi_0 \qquad \alpha_1 = \cos\varphi_1 \qquad \alpha_0 = \cos\varphi_0$$
$$\delta z_1 = \delta s_1 \sin\psi_1 \qquad \delta z_0 = \delta s_0 \sin\psi_0 \qquad \gamma_1 = \sin\varphi_1 \qquad \gamma_0 = \sin\varphi_0$$

nous en déduirons :

$$\frac{R}{C} = \delta s_1 \left(\cos\psi_1 + \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} \sin\psi_1 \right) - \delta s_0 \left(\cos\psi + \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} \sin\psi_0 \right).$$

$$= \delta s_1 \frac{\cos(\psi_1 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \delta s_0 \frac{\cos(\varphi_0 - \psi_0)}{\cos\varphi_0}.$$

On aura donc, dans le cas où les extrémités décrivent des courbes données, les deux équations :

$$\psi_1 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_1 = \psi_0 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Donc 1° – La cycloïde vient aboutir normalement à la courbe d'arrivée ; 2° La tangente à la courbe de départ, au point de départ, est perpendiculaire à la tangente de la cycloïde au point d'arrivée.

IV – **Problème des Isopérimètres** – Cherchons parmi toutes les courbes planes fermées, ayant une longueur donnée l celle qui entoure l'aire maxima.

Supposons la courbe trouvée, nous pouvons supposer l'origine à l'intérieur de cette courbe puisque nous ne lui faisons subir que des déformations infiniment petites ; prenons alors des coordonnées polaires ρ, ω nous aurons à considérer l'intégrale :

$$J = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\omega$$

avec la condition qu'on ait :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\omega^2} = l$$

D'après ce que nous avons vu nous devons envisager l'intégrale

$$J' = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\omega + \lambda \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\omega^2}$$

où λ est une constante, et traiter la question comme un problème de maximum absolu. Or on a ici en faisant $d\omega = \delta$.

$$\delta J' = \left| \frac{\lambda \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \, \delta\rho \right|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left(2 \rho \, \delta\rho + \frac{\lambda \rho \, \delta\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right) d\omega - \delta\rho \, d \left(\frac{\lambda \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right)$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc :

$$\left(2\rho + \frac{\lambda \rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right) d\omega = d . \frac{\lambda \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

ou, en développant,

$$\frac{\rho\rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\lambda}$$

Le premier membre est l'expression connue de la courbure en coordonnées polaires. La courbe cherchée est donc un cercle de rayon $\frac{\lambda}{2}$. Donc le cercle est de toutes les courbes de périmètre donné celle qui enveloppe l'aire maxima. Il est évident ici encore a priori qu'on a bien un maximum.

V — Surface de révolution d'aire minima — Trouver, parmi toutes les courbes passant par deux points donnés, celle qui, en tournant autour d'une droite OX, engendre une surface de révolution dont l'aire, comprise entre les parallèles extrêmes, soit minima.

Il n'y a pas évidemment de maximum il y a au contraire au moins un minimum.

Nous supposerons que les deux points donnés M, M_1 soient dans

un même plan avec l'axe de révolution, et nous prendrons ce plan pour plan des xy. Nous chercherons la ligne plane qui répond à la question, c'est à dire le méridien. L'aire de la zône considérée est proportionnelle à l'intégrale :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \quad \int y\, ds$$

On a ici :

$$\delta(y ds) = \delta y\, ds + y\left(\frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy\right) = \delta y\, ds + y\cos\alpha\, d.\delta x + y\sin\alpha\, d\delta y$$

α étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x. En intégrant :

$$\delta J = (y\cos\alpha\,\delta x + y\sin\alpha\,.\delta y)_0^1 + \int \delta y\, ds - \delta x\, d(y\cos\alpha) - \delta y\, d(y\sin\alpha).$$

Les équations de condition sont :

$$d\,(y\cos\alpha) = 0 \qquad\qquad d(y\,\sin\alpha) = ds$$

Ces deux équations sont identiques, comme on s'en assure en développant et peuvent s'écrire :

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{y}{\cos\alpha}$$

Or la normale au méridien, limitée à OX est égale à $\frac{-y}{\cos\alpha}$. Donc le méridien est caractérisé par cette propriété que le rayon de courbure, est égal et de signe contraire à cette normale. Ce méridien est donc une chaînette ayant pour base l'axe OX. L'équation de cette chaînette est :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$$

Elle contient deux arbitraires a, b, dont on disposera de manière à vérifier les conditions aux limites. Dans le cas actuel, comme dans ceux qui précèdent, il y aura lieu de discuter ces conditions aux limites, car elles doivent conduire à des valeurs réelles de a et b.

Si les deux extrémités doivent se mouvoir sur deux courbes données en appelant $\varphi_0\ \varphi_1$ les angles que font avec ox les tangentes à ces deux courbes aux extrémités de la chaînette, par α_1, α_0 les angles directeurs de la tangente à cette dernière aux mêmes points on aura :

$$R = y_1\, \delta s_1 \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - y_0\, \delta s_0 \cos(\varphi_0 \alpha_0)$$

On en conclut que la chaînette devra être normale aux deux courbes données, à ses deux extrémités.

VI_Question d'analyse — Nous donnerons pour terminer un exemple d'application de la méthode des variations à une question étrangère à la théorie des maxima et des minima.

Considérons des fonctions inconnues $x_1, x_2 \dots x_n$ d'une même variable t, assujetties seulement à prendre chacune deux valeurs données pour $t=t_0$ et $t=t_1$ et soient $P_1, P_2 \dots P_n$ des fonctions données de $x_1, x_2 \dots x_n$, cherchons comment doivent être choisies ces fonctions P_i pour que l'intégrale :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 \quad + P_n\,dx_n$$

ait une valeur constante, c'est-à-dire, indépendante des fonctions $x_1\,x_2 \dots x_n$.

Calculons δJ, en remarquant que les termes aux limites sont nuls :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\delta P_1\,dx_1 - \delta x_1\,dP_1) + (\delta P_2\,dx_2 - \delta x_2\,dP_2) + \dots + (\delta P_n dx_n - dP_n \delta x_n)$$

Comme les fonctions $x_1\,x_2 \dots x_n$ sont absolument arbitraires, il faut évidemment annuler les coefficients de tous les δx ; ce qui donne n équations de condition telle que :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_i}\,dx_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\,dx_2 \;\dots\; + \frac{\partial P_n}{\partial x_i}\,dx_n - dP_i = 0 \qquad (i=1,2\dots n)$$

ou encore :

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial P_n}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0 \quad (i=1,2\dots n)$$

On a ainsi n équations linéaires par rapport aux dx, et chacune d'elles doit se réduire à une identité, puisque ces différentielles sont absolument arbitraires ; on a donc, quels que soient i, j :

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

On en conclut que l'expression :

$$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 \dots + P_n\,dx_n$$

doit être une différentielle exacte. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si nous la supposons remplie, il existera une fonction $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$ ayant l'expression précédente pour différentielle ; si on y remplace $x_1\,x_2 \dots x_n$ par des fonctions quelconques de t assujetties à prendre pour $t=t_0$, $t=t_1$ des valeurs données, telles que :

$$x_i\,(t_0) = \alpha_i \qquad x_i\,(t_1) = \beta_i\;,$$

nous aurons :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} d\varphi\ (x, x, x_2 .. x_n) = \varphi(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) - \varphi(\alpha_1 \alpha_2 . \alpha_n)$$

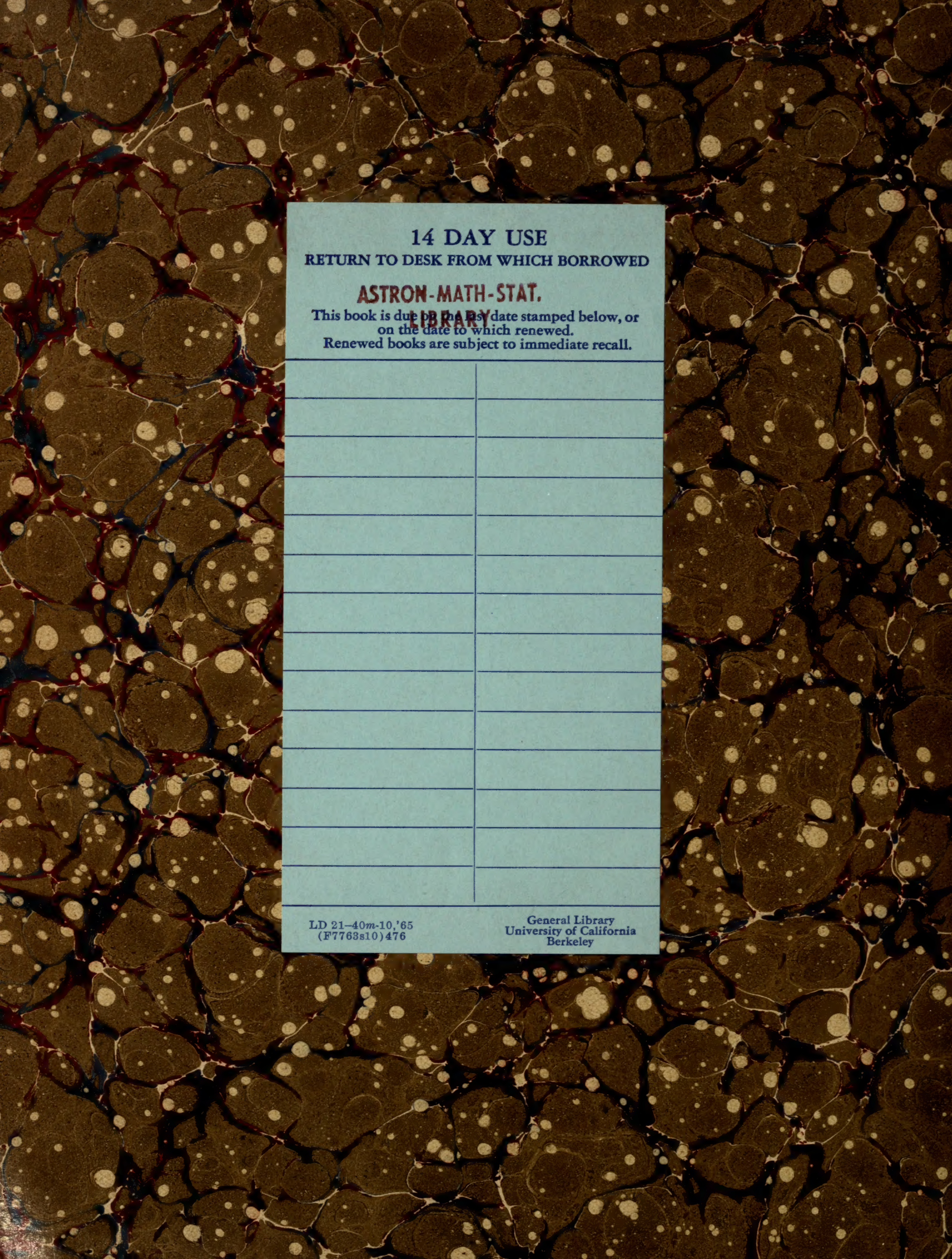
J sera donc bien une constante. En résumé : Pour que l'Intégrale J ait une valeur constante il faut et il suffit que l'expression :

$$P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 \; .. \qquad + P_n\ dx_n$$

soit une différentielle exacte.

Fin.





14 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED
ASTRON-MATH-STAT.
LIBRARY
This book is due on the last date stamped below, or
on the date to which renewed.
Renewed books are subject to immediate recall.
LD 21-40m-10,'65
(F7763s10)476
General Library
University of California
Berkeley


ASTRONOMY, MATHEMATICS
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545750
65586
QA300
D4
v.3
Math.
dept.
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

